

**SINIF ÖĞRETMEN ADAYLARI VE ÖĞRETMENLERİNİN VERİ İŞLEME  
BAĞLAMINDAKİ İSPAT ŞEMALARINI İLE MATEMATİKSEL İSPAT  
HAKKINDAKİ GÖRÜŞLERİ**

**PRE-SERVICE AND IN-SERVICE TEACHERS' OPINIONS ON PROOF SCHEMES  
AND MATHEMATICAL PROOF IN THE CONTEXT OF DATA PROCESSING**

**Prof. Dr. Sare ŞENGÜL**

Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Bilimleri Fakültesi  
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı  
İstanbul/TÜRKİYE

ORCID: 0000-0002-1069-9084

**Arş. Gör. Dilara Yılmaz**

Kocaeli Üniversitesi Eğitim Fakültesi  
Temel Eğitim Bölümü Sınıf Öğretmenliği Anabilim Dalı  
Kocaeli/TÜRKİYE

ORCID: 0000-0001-5539-8261

**Özet**

Bu çalışmanın amacı sınıf öğretmenleri ve sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri ile ispat şemalarını incelemektir. Araştırma nitel araştırma yaklaşımlarından çoklu durum çalışması; örneklem türlerinden ise maksimum çeşitlilik örnekleme kullanılmıştır. Araştırmaya 16 sınıf öğretmeni, 12 öğretmen adayı olmak üzere toplam 28 kişi katılmıştır. Katılımcıların matematiksel ispata ilişkin görüşleri açık uçlu sorulardan oluşan anket ile yarı yapılandırılmış görüşme formları kullanılarak toplanmıştır. İspat şemalarının incelenmesi amacıyla ise veri işleme alanında grafik oluşturmayı gerektiren, araştırmacılar tarafından oluşturulmuş beş tane problem kullanılmıştır. Elde edilen veriler içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Araştırmada bulgularına göre sınıf öğretmenlerinin ve adaylarının ispatın doğruluğu kanıtlama ve somut delillerle ortaya koyma anlamlarına vurgu yaptıkları tespit edilmiştir. İspatın özellikleri arasında en sık; anlaşılır, tutarlı, nesnel, çelişkilerden arınmış olma durumlarının olduğu görülmüştür. İspat şemalarına yönelik bulgulara göre ise öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının büyük çoğunlukla deneysel ispat şemalarına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu sonuçlar ışığında araştırmacılara ilkökul düzeyi matematik eğitiminin gelişimi için farklı öğrenme alanlarında ve farklı konularda ilkökul öğrencileri, sınıf öğretmenleri ve öğretmen adaylarının katılımını gerektiren araştırmalar yapmaları önerilmektedir.

**Anahtar Kelimeler:** ispat, ispat şemaları, veri işleme, sınıf öğretmenleri

**Absract**

In this study, perspectives of primary school teachers and pre-service primary teachers about mathematical proof and proof schemes were examined. Participants' views on mathematical proof were collected with a questionnaire consisting of open-ended questions. In order to examine the proof schemes, the problems created by the researchers that require

graphing about data processing were used. The analysis of the obtained data was analyzed using the content analysis method, which is the most commonly used method among qualitative data analysis methods. According to the findings obtained in the research, the classroom teachers and candidates emphasized the meanings of proving, proving the truth and revealing with concrete evidence; It has been determined that they associate the purpose of proving with increasing confidence in information and confirming meaningfulness. It has been observed that being understandable, consistent, objective, and free from contradictions are the most frequently stated expressions among the features of the proof. According to the findings regarding proof schemes, it was seen that teachers and pre-service teachers mostly had experimental proof schemes. In the light of these results, researchers are recommended to conduct research involving pupils, primary teachers and teacher candidates for the development of primary school level mathematic education.

**Keywords:** Pre-service and in-service teachers, proof based research, problem solving, data process

## 1.GİRİŞ

Matematik öğretiminin amacı hesaplama becerisi kazandırma, muhakeme yapmaya olanak tanıma, akıl yürütme ve esnek düşünme, ilişki kurma ve problem çözebilme gibi bilişsel becerileri geliştirmektir. Bu becerilerin kazanımı ise eleştirel bir bakış açısıyla neden ve niçin sorularına yanıt aranarak kavramsal bir anlayışın sağlanmasıyla mümkün olabilir. Bu sayede kişinin iyi bir problem çözücü olması hedeflenir. Araştırmalar gerek ilkökul öğrencilerinin gerekse ilkökuldan itibaren diğer seviyelerdeki bütün öğrencilerin problem çözme ve akıl yürütme konularında yeterli olmadıklarını göstermektedir (Çakmak, 2014; Çoşkun, 2009; Ören, 2007; Uğurel & Moralı, 2010; Yeşildere & Türnüklü, 2007). Bunun sebeplerinden biri, öğrencilerin sonuçların doğruluğunu ispatlamaya yönelik bir yaklaşıma sahip olmaması, kavramsal anlama odaklanılmaması ve dolayısıyla matematik problemlerinin çözümünde ezberledikleri formül ve yapıları kullanmaları olabilir. Oysa problem çözümü ve çözümün anlaşılması için sınıf uygulamalarında sonuçların ikna edici nedenlendirme süreçlerine dayalı ve tartışma içeren öğrenme ortamlarında uygulamalara ağırlık verilmesi gereklidir (Balacheff, 1988). Bu nedenle öğrencilerin düşünce gelişimlerini desteklemek ve kavramsal bilgi edinmelerini kolaylaştırmak için bilişsel seviyelerine uygun ispat uygulamaları ve etkinlikleri düzenlemek önemli görülmektedir (Bayazıt, 2017).

Matematikselsel ispatı anlamlandırmak bir disiplin olarak matematiği anlamlandırmak ile eşdeğerdir (Pair & Calva, 2020). Bu noktada matematiğin nasıl öğretileceği, nasıl öğrenileceği ve öğrenildiğinin nasıl anlaşılacağı gibi sorular ortaya çıkmaktadır (Harel, 2008). Matematiğin nasıl ve hangi yollarla öğretileceği; öğrencide kazandırılmak istenen düşünce kalıpları ve daha birçoğu ispat temelli öğretimin odak noktası olup eğitimciler bu noktada önemli işler düşmektedir. Bu araştırmada da sınıf öğretmenlerinin ve geleceğin öğretmeni olacak sınıf öğretmeni adaylarının matematisel ispat konusundaki görüşleri ve ispat şemaları incelenmiştir.

Öğrencilerin matematikte birçok konu ve öğrenme alanında zorluk yaşadığı bilinmektedir. Anlamlı öğrenmeyi sağlama ve doğrulama odaklı çözümler üretme konusunda zorlanılan alanlardan biri de olasılık ve istatistiktir (Çakmak & Durmuş, 2015; Yıldız & Şengül

2017). PISA ve TIMSS gibi uluslararası sınavlarda son yıllarda istatistik okuryazarlığı, istatistiksel düşünme kavramları ön plana çıkmaktadır. Öyle ki bu kavramlar, problem çözme, akıl yürütme, ilişkilendirme, analiz etme, yorumlama gibi çeşitli zihinsel becerileri içinde barındırmaktadır (Baykul, 2009; Boravenrak & Peard, 1996). Ayrıca matematikteki diğer öğrenme alanlarıyla ciddi bir etkileşim içinde olup birçok matematik konusu ve kavramları ile birlikte ele alınıp işlenmektedir (Fischbein & Schnarch, 1997; Haylock & Cockburn, 2014). Bu durum eğitimcilerle bu konu ve kavramların erken yaşlardan itibaren öğretilmesinin gerekliliğini göstermektedir (Levy, Meletiou-Mavrotheris & Pappastodemos, 2018).

İstatistik ve istatistiğin temeli olan olasılık konuları ilköğretim birinci kademe matematik programında veri işleme alanı altında çeşitli istatistiksel becerilerine yer verilmiştir (MEB, 2018). Veri işleme öğrenme alanı 1. sınıftan itibaren ve günlük hayat bağlamında oluşturulan problemler aracılığı ile ele alınmaktadır. Programa göre ilköğretim öğrencileri şekil, sütun, nesne grafikleri, sıklık tablosu ve ağaç şeması oluşturma ve yorumlama kazanımları ile yükümlüdür. Bu sayede öğrencilerin verileri oluşturma, yorumlama, doğrulama gibi becerilerinin geliştirilmesi hedeflenmektedir. Bu çalışmada veri işleme alanında ele alınan kavramlardan yararlanarak çeşitli tablo ve grafiklerin oluşturulmasına dayanan kazanımlarına odaklanılmıştır. Alanyazın incelendiğinde ortaokul düzeyinde olasılık ve istatistik konusundaki becerilerin beklenen düzeyde gelişmediği (Bakırcı, 2014; Çakmak & Durmuş, 2015; Dereli, 2009; Güven & Özmen, 2014; Memnun, Altun & Yılmaz, 2010; Mills & Holloway, 2013; Şafak & Akkaya, 2014) ve ortaokul öğrencilerinin büyük bölümünün (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Ören, 2007; Sen & Güler, 2015) ispat sürecinde analitik düşünemediklerini göstermektedir. Bu sonuçlar ilköğretim ve hatta okul öncesi gibi daha alt düzeydeki öğrenciler için bu konu ve alanların desteklenmesi gerektiğini göstermektedir.

### 1.1.İspat Temelli Matematik

Matematiksel ispat matematiğin tümdengelimle dayanan doğasına dayanır ve tüm matematik konuları ile ilişkilidir (NCTM, 2000). Matematikçiler genellikle ispatın formel anlamına, başka bir deyişle kabul edilmiş prosedürlere odaklanırlar (Reid & Knipping, 2010). Bu kabul edilen kurallar ve kuralların doğrudan kullanıldığı ispatlar tüm seviyedeki öğrenciler için uygun olmamakta ve dolayısıyla her zaman geçerli olmamaktadır (Hanna, 2002; Healy & Hoyles, 2000). Örneğin matematikte önemli bir yeri olan Pisagor teoreminin ispatının 80 sayfa uzunlukta olduğu ancak uygulamada bunun kullanılmadığı, herhangi bir okuyucunun ya da öğrenenin bu teoremin ispatı ile belki de hiç karşılaşmadığı bilinmektedir (Cadwallader-Olsker, 2011; Renz, 1981; akt. Weber, 2003). Bunun sonucunda ise informel olarak adlandırılan, pratikte geçerliliği olan ve doğruluğun kanıtlanmasına dayanan ispatlama türü ortaya çıkmıştır. Bu görüşün temelinde matematiksel ispatın sosyal bir süreç olduğu ve sınıf içi uygulamalarda anlamlı öğrenmeye katkı sağladığı görüşü hakimdir (Tall, 1989).

İspat, kanıt, doğrulama, gerekçelendirme, argüman oluşturma, DNR (Duality-İkicilik, Necessity-Gereklilik, Repeated Reasoning-Tekrarlı düşünme) gibi farklı kavramlar ile isimlendirilen ispatlama süreci doğruluğun test edilmesi olarak düşünülebilir. Harel (1999) tarafından geliştirilen ispat temelli öğretim, belirli bir matematik konusu ya da sınıf düzeyi ile sınırlı olmayıp matematiği anlama ve düşünmeye dayanan genel bir çerçevedir. Kısaca, çeşitli gerekçeler sunmayı gerektiren ve sonu bir genellemeye varan bir problem çözme sürecidir. Matematiksel bir ifadenin ispat sayılması için önceki bilgiler üzerine inşa edilmiş olması,

mantıksal çıkarımlar içermesi, tutarlı olması ve genellemeye izin vermesi gerekir (Griffiths, 2000). İspatlama süreci, iddialarla ilgili çeşitli mantıksal çıkarımlar yapma, muhakeme etme, başkalarını ikna etme eylemlerini içerir. Bu noktada ispatlama süreci üst bilişsel düşünme, soyutlama ve genelleme yapabilme becerilerini geliştirir (Bayazıt,2017).

Harel (2008), matematiksel ispat sürecinin okullarda uygulanmasını iki soru ile ortaya çıkarmak istemiştir: Okullarda öğretmek istediğimiz matematik nedir? Matematiği nasıl öğretilmeliyiz? İspat temelli öğretim de matematiğin nasıl öğretilmesi düşüncesinden hareket edilerek öğrencilerde anlama ve düşünme yollarının geliştirilmesi hedeflenmiştir.

Sfard'a göre (1991), matematiksel bilgi kavramsal ve işlemsel bilgilerden meydana gelir. İspat temelli öğretimde bu bilgiler Harel'in (2013) üçlü yapı olarak tanıttığı zihinsel eylemler, anlama ve düşünme yolları olarak belirtilmektedir. Zihinsel eylemler, zihnimizde devamlı olarak yaptığımız akıl yürütme, sınıflandırma, analiz etme gibi düşünsel becerileri; anlama yolları zihinsel eylemler sonucunda oluşan ürünleri; düşünme yolları ise kullanılan zihinsel eylemlerin özelliği ve sonuca giderken izlediği yollardır. Kısacası düşünme yolları anlama yollarının bir karakteristiği, özelliğidir. Bireylerin bir konu hakkındaki düşünme yolu ve bunu eyleme dökme yolu arasında bir ilişki vardır. Diğer bir deyişle, anlaşılabilir bir olgu aynı zamanda nasıl düşünüldüğünü de beraberinde getirir (Carlsson, 2002). Öğrencilerinin anlama ve düşünme yollarını tespit etmek isteyen bir öğretmenin yapması gereken, öğrencileri problem durumları ile karşı karşıya getirerek onların nasıl anladığını ve düşündüğünü ortaya çıkarmaktır. Harel (2008) öğrencilerin problemleri çözme şekli onların anlama ve düşünme yolu olduğunu çünkü problem çözmenin zihinsel eylemlerden ibaret olduğunu belirtmiştir. Problem çözme şekilleri düşünme ve anlama yollarını gösterdiği gibi ispat şemaları da ispatlama eylemine dayanmaktadır (Harel, 2008).

Öğrencilerin sahip olduğu düşünme ve anlama yolları ile bunları içeren ispat şemaları öğrencilerin yaşadığı zorlukları, kavram yanılgılarını anlamak için de birer araçtır (Baki, 2019). İspat şeması, matematiksel bir ifadenin doğruluğu ya da yanlışlığı konusunda kişinin kendisini ya da başkalarını ikna etmesine dayanan bir gerekçelendirme (Harel & Sowder, 1998). Doğrusunu anlamayı ve ikna etmeyi içeren ispat şemaları dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üçe ayrılır. Dışsal şema, dışarıdan bir otoritenin yanıtlarının aynen alınması ve aktarılmasını ifade eder. Bu otorite öğretmen, aile ya da bir doküman olabilir. Kişilerin ispatın doğası hakkındaki fikirleri dışsal kaynaklıdır, daha önceden edinilmiş ezber ve yüzeysel fikirlere dayalıdır ve kabul edilebilir ispatlar yapamazlar. Bu sebeple ispatlarını doğru kavramlar ve sonuçlarla gerekçelendiremeyen katılımcılar dışsal olarak sınıflandırılır. Deneysel şema belirli örnekler üzerinde ispatlama çabası içerisinde olup örnekler temelinde anlamlandırılır. Buna ek olarak, bir durumun doğru ya da yanlış olduğunu hisleriyle sezinler fakat buna ilişkin güçlü bir kanıt bulamazlar, sıklıkla çizimlere başvurarak ispatlama eğiliminde bulunurlar. Analitik şema ise öğrencilerin daha önceki bilgi ve tecrübelerine dayanarak çıkarımlar yapması ve stratejiler geliştirmesini ifade eder. Öğrencilerin sonucu gerekçelendirmeleri var olan durumun genel yönleriyle ilişkilidir ve sonucunda mantıklı açıklamaya giderler (Sowder & Harel, 1998). Analitik ispat şeması diğerlerine göre daha fazla düşünme becerisi gerektirmesi yönüyle diğer iki şemadan ayrılmaktadır. Bununla birlikte, yapılan araştırmalarda çeşitli düzeylerdeki öğrencilerin genellikle dışsal ve deneysel ispat şemalarına sahip oldukları görülmektedir (Arslan, 2007; Coe

& Ruthven, 1994; Contay & Duatepe Aksu, 2019; Doruk & Kaplan, 2013; Fonseca; 2018; İskenderoğlu, 2003; Monoyiou, Xistouri & Philippou, 2006; Neria & Amit, 2004; Sarı, Altun & Aşkar, 2007; Yıldız & Şengül, 2017).

### 1.2.İlkokulda İspat

Matematiksel düşünmenin bir basamağı mantıksal sorgulama yapmak ve gerekçelendirmektir. İlkokul öğrencilerinin doğrulama yapabilmek için teoremleri ispatlaması değil mantıklı açıklamalar ve doğrulamalar yapması beklenmektedir (Haylock & Cockburn, 2014). Hanna ve Villiers (2008), ispat yapma becerisinin küçük yaşlardan itibaren kazanılması gerektiğini vurgulamışlardır. Okul öncesi dönemi öğrencilerin matematik ile ilk karşılaştığı, sezgiye dayalı çıkarımlar yaptığı; ilkökul dönemi ise formel matematiğe giriş ve ileriki matematik konularının temelini oluşturan dönem olduğundan bu dönemdeki öğrencilerin düşünme süreçlerinin incelenmesi önemli görülmektedir. Çünkü çocuklar bu dönemde sorgulamaya, işlemler ve kavramlar üzerinde düşünmeye başlayarak matematiğe karşı tutum geliştirirler. Okul öncesi ve ilkökul döneminde kazandırılan matematiksel düşünme becerileri, ileriki süreçlerde görecekları konu ve alanların temeli niteliğinde olup bu dönemlerde kazanılan beceriler gelecek yıllardaki akademik başarıları ile doğrudan ilişkilidir (Clements, 2001). Eğitimciler de öğrenme ortamlarını tasarlarken öğrencilerin araştırma ve sorgulama yapmasına, merak etmesine ve keşif yapmasına izin verir nitelikte ortam ve içerikler oluşturmalıdır.

Yapılandırmacı öğrenme yaklaşımının odağı öğrencilerin nasıl öğrendiği, bilgiyi nasıl yapılandırdığıdır. Bununla birlikte öğretmenlerin de öğretmek için hangi yöntemleri tercih ettiği, daha iyi bir öğrenme ve anlama için ne tür eylemlerde bulunduğu da önemli görülmektedir. Ancak öğretmenlerin geleneksel eğitim anlayışıyla hareket ettikleri; yeniliklere ayak uyduramadıkları konusunda araştırmalar mevcuttur (Knuth, 2002; Yoo, 2008). Yeni ve alternatif anlayışların geliştirilmemesi ya da uygulanmaması yalnızca öğretmenler için değil öğrenciler için de dezavantajlı bir durum oluşturmaktadır. İspat temelli öğretim konusunda yapılan araştırmalar hem öğretmen hem de öğrencilerin ispatı anlamalarında yetersizliklerini ve kavram yanılgılarını vurgulamaktadır (Çontay & Duatepe-Paksu,2019; Doruk & Kaplan, 2013; Güler, 2013; Healy & Hoyles, 2000; Norby, 2013; Riley, 2003; Oflaz 2017; Uygan, Tanışlı & Köse, 2014). Buna ek olarak ispat temelli öğretim birçok öğretmen tarafından karmaşık görüldüğünden matematik derslerinde çok sık kullanılmamaktadır. Dolayısıyla ilk eğitim yıllarından itibaren öğrencilerde ispatlama, doğrulama becerilerinin geliştirilmesi için öğretmenlerin ders uygulamalarında buna yönelik içerikler oluşturması ya da uygulaması gerekmektedir (Oflaz, Bulut & Akcakin, 2016).

Öğretmenlerin alan bilgilerinin ve öğretime ilişkin düşüncelerinin sınıf içi uygulamalarını şekillendirdiği ve böylece öğrencilerin düşünme becerilerinin gelişimi üzerinde etkilerinin olduğu bilinmektedir (Sürücü & Ünal,2018; Tanışlı, 2013). Özellikle ilkökul düzeyindeki öğrenciler için sınıf öğretmenleri birçok açıdan etkili birer model olmaktadır. Öğrencilerin bilgi yapılandırmaları, öğretmenleriyle etkileşimi ve öğrenme ortamının yapısıyla yakından ilişkilidir. Öğretmenlerin matematiksel bilgileri ve gerekçelendirmeleri salt bilgi aktarımı yoluyla sunması, ispat edinimi sırasındaki bilişsel süreçlere yeterince ağırlık vermemesi öğrenme niteliğini düşüren durumlara örnektir (Uğurel & Moralı, 2010). İspat temelli öğretim, ilkökul düzeyi için alinyazında geniş bir yer tutmamasına rağmen ilkökul ders

müfredatına uzak bir konu da değildir. Yapılan işlemin farklı açıdan incelenmesi ve doğrulanmasına dayanan eylemler, çözümlere ilişkin gerekçelendirmeler, genellemeye varan sonuçlar ve argümanın geçerliğinin tartışılması ispat kavramına vurgu yapmaktadır (Hunter,2007). Bu sebeple ispat temelli öğretim konusunun ilkökul düzeyinde yapılmasının uygun olduğu düşünülmektedir.

Araştırmalar, öğretmenlerinin matematiksel bilgilerinin ve tutumlarının öğrencilerin bakış açısını etkilediğini göstermektedir (Öztürk, Akkan & Kaplan,2019). Bu anlamda matematiğin tüm alan ve konularında öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının anlama ve düşünme yollarının geliştirilmesi ve dolayısıyla ispat şemalarının incelenmesi, öğrencilerin de matematiksel düşünme becerilerini etkilediğinden daha da önemli hale gelmektedir. Matematik öğretmenleri ve öğretmen adayları ile yapılan araştırma sonuçları, anlama ve düşünme yollarının yeterli düzeyde gelişmediğini göstermektedir (Güler & Dikici, 2011; İskenderoğlu, 2010; Şengül & Güner, 2013; Yıldız & Şengül 2017). Bununla birlikte sınıf öğretmenlerinin yer aldığı ispat konulu çalışmalara da yeterince yer verilmediği görülmüştür. Temel eğitim düzeyinde öğrenilen bilgilerin ve kazanılan becerilerin ileriki düzeyleri de doğrusal olarak etkileyeceği düşünüldüğünde ilkökul düzeyinde de benzer çalışmalar yürütülmesi gerektiği düşünülmüştür. İlkokul öğrencilerinin anlama ve düşünme yollarının geliştirilmesi için öncelikle sınıf öğretmenlerinin ve geleceğin öğretmeni olan adayların anlama ve düşünme yollarının yani ispat şemalarının incelenmesinin alanyazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Belirtilen nedenlerden dolayı araştırmanın amacı sınıf öğretmenlerinin ve sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri ve veri işleme öğrenme alanındaki ispat şemalarını incelemektir. İlkokul matematik dersi veri işleme öğrenme alanında grafik oluşturmayı gerektiren problemleri çözme bağlamında aşağıdaki sorulara cevap aranmıştır:

1. Sınıf öğretmeni ve adaylarının ispat ile ilgili görüşleri nelerdir?
2. Sınıf öğretmeni ve adaylarının ispat şemaları nelerdir?

## **2.YÖNTEM**

### **2.1.Araştırma Modeli**

Bu araştırmada araştırmanın doğasına uygun olan nitel araştırma desenlerinden çoklu durum çalışması kullanılmıştır. Derinlemesine ve bütüncül bakış açısıyla incelenmesi gereken durumlarda yol gösterici olan durum çalışmaları yalnızca çıktılar ile değil süreç ya da olgunun bütünüyle ilgili bilgi sahibi olunmasını sağlar. Ayrıca güncel bir durumun sınırlı bir kapsamda ele alınmasını ve müdahale edilmeden incelenmesini gerektirir (Merriam, 1998). Bu araştırmada da durum olarak matematikte ispata dayalı öğretim sınıf öğretmenleri ve adaylarının bakış açısına dayanarak incelenmiştir. Ayrıca doğrulamanın temeli olan anlama ve düşünme yolları da çeşitli problemler aracılığıyla ortaya çıkarılmıştır. Her iki örneklem grubu kendi içerisinde ele alınıp sonrasında karşılaştırılmıştır. Durum çalışmalarında araştırmacılar belirli bir veri toplama yöntemi, aracı ya da analiz yöntemi ile sınırlı kalmaz. Aksine birden fazla veri kaynağından yararlanarak veya çoklu veri toplama araçları kullanarak derinlemesine incelemenin yapılmasını vurgular (Creswell, 2014).

### **2.2.Çalışma Grubu**

Araştırma 16 sınıf öğretmeni ve 12 sınıf öğretmeni adayı olmak üzere toplamda 28 katılımcı ile gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adayları bir devlet üniversitesinin sınıf öğretmenliği bölümünde 4.sınıfta eğitim görmekte iken öğretmenler de Kocaeli ilinde çeşitli devlet okullarında görev yapmaktadırlar. Araştırmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitleme yöntemi kullanılmıştır. Bu örnekleme yönteminde zengin bilgi kaynağı sunabilecek örneklem grubu ile çalışılır(Creswell, 2014). Bu araştırmada da maximum çeşitleme yöntemiyle öğretmen ve öğretmen adaylarına ait verilerin sonuçlarını kıyaslama ve ortak durumları yorumlama imkânı elde edilmiştir. Sınıf öğretmenliği bölümü lisans programında öğrenim gören öğrenciler öncelikle Temel Matematik ve sonrasında ise iki dönem boyunca Matematik Öğretimi dersi alırlar. Son sınıf öğrencilerinin seçilmesinin sebebi matematik öğretimi dersinin son sınıftan önce öğretilmiş olması ve bu dersi aldıktan sonra kavramları ve konuları zaten öğrenmiş olduklarından araştırmaya katılmalarının daha uygun görülmesidir. Böylece öğrencilerin matematiksel bilgi konusunda yeterli yetkinliğe ulaştığı varsayılmıştır. Araştırmaya katılım gönüllülük esaslı olup katılımcılara tüm süreç hakkında bilgi verilmiş; diledikleri an çalışmadan ayrılacakları özgürlüğe sahip oldukları hatırlatılmıştır. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının akademik başarıları orta düzeyde; öğretmenlerinin kıdem yılları 1 ile 15 arasında değişiklik göstermektedir. Araştırmanın katılımcılarına ait tanımlayıcı bilgiler Tablo 1’de gösterilmiştir.

**Tablo 1. Katılımcı Profilleri**

Katılımcılar		Sınıf öğretmeni	Öğretmen adayı	Toplam
Cinsiyet	Kadın	9	7	16
	Erkek	7	5	12
Kıdem Yılı	0-5	6		6
	6-10	5		5
	11-15	5		5

### 2.3.Araştırma Süreci

Araştırma süreci iki aşamada yürütülmüştür. İlk aşamada veri toplamaya başlamadan önce olası eksikliklerin önceden belirlenmesi, çalışmanın katılımcılar açısından açık ve net olma durumları ile esas çalışma için gerekli sürenin tespiti için üç öğretmen adayı ile pilot çalışma gerçekleştirilmiş olup anlam karmaşası yaratacağı düşünülen durumlar ve problemler ile ilgili durumlar revize edilmiştir. Bu aşamada matematik eğitimi alanında görev yapan ve doktor ünvanına sahip iki uzmanın görüşlerinden yararlanılmış, bunun doğrultusunda da çeşitli revizyonlar yapılmıştır. Pilot çalışmaya katılan katılımcılar ana çalışmaya katılmamıştır.

Araştırmanın ikinci aşamasında anket formları katılımcıların bir kısmına elden bir kısmına da e-posta ile gönderilmiş ve yanıtlar e-posta ile teslim alınmıştır. Anket sürecinin tamamlanmasının ardından 3 öğretmen ve 3 öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış görüşme formu kullanılarak her bir katılımcı ile birer defa online görüşme yapılmıştır. Görüşme yapmak için katılımcılar arasından genel olarak problemlere doğru ve yanlış yanıt verenler seçilerek her farklı görüşlere ulaşılmaya çalışılmıştır. Katılımcılara en çok hangi konuda zorlandıkları,

neden o çözümü tercih ettiği, matematik derslerinde ispat temelli yaklaşımı kullanmayı isteyip istemediklerine yönelik sorular sorulmuştur. Katılımcılar ile yapılan görüşmeler yaklaşık 15 dk sürmüş olup araştırma süreci toplamda 2 hafta sürmüştür.

#### 2.4.Verilerin Analizi

Araştırmada elde edilen veriler nitel araştırmalarda en sık kullanılan tümevarımcı analiz olarak da bilinen içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir. İçerik analizi araştırmacının eldeki verileri daha sistemli hale getirmesi için veriler arası ilişkilerde kullandığı temalar ve kategorilere ayırmaya dayanan bir analiz yöntemidir (Creswell, 2014). Analiz sürecinde birbirine benzeyen veriler çeşitli kavramlar ve temalar çerçevesinde bir araya getirilir; okuyucunun anlayabileceği şekilde organize edilerek yorumlanır (Yıldırım & Şimşek, 2008). Bu araştırmada da elde edilen veriler öncelikle listelenerek kodlanmış ve devamında kendi içinde anlamlı bütün oluşturan kodlar ile kategoriler oluşturulmuştur. Öğretmenlerin ve adayların ispat kavramına ilişkin yanıtları ayrı ayrı olarak ve katılımcı özellikleri de gözetilerek kodlanmıştır. Araştırmacılar tüm yanıtları kendi belirledikleri kavramsal kategoriler altında toplamışlardır. Daha sonra araştırmacılar aralarında tartışarak elde edilen tüm kodlar katılımcıların yanıtlarına göre literatürde bulunan ispat konusunda yapılmış çalışmalar da göz önünde bulundurularak kategorileştirilmiştir. Oluşturulan kodlar ve kategorilere örnek Tablo 2’de gösterilmiştir.

**Tablo 2.** Analize İlişkin Örnek Temalar

N	Kategoriler	Katılımcıların ifadeleri
1	Evensellik	Matematiksel bir ispat, tüm dünyada kabul görmelidir.
2	Tutarlılık & Denenebilirlik	Farklı yollarla denendiğinde de aynı sonucu vermeli.
3	Belirsizliği giderme & Bilgiye güveni artırma	Doğru bilgiye ulaşmada şüpheleri ortadan kaldırmaktır.
4	Anlaşılabilirlik	Akla mantığa uygun olması, akılcı olması

Katılımcıların ispat şemaları Lee (1999) tarafından özetlenen Harel ve Sowder’in (1998) ispat şemalarına göre değerlendirilmiştir (Çontay, 2016). Araştırmacılar, içeriği bu araştırmanın amacına ve yöntemine dayanarak Tablo 3’te özetlemişlerdir.

**Tablo 3.** İspat Şemalarının Özellikleri

Dışsal şemaya ait özellikler	DeneySEL şemaya ait özellikler	Analitik şemaya ait özellikler
İspatın neden doğru olduğu hakkında gerekçelendirme yapamama	İspatı örnekler göstererek yapılandırma	Mantıksal akıl yürütme ile ispatlama
Formülleri uygulama	Bir ya da daha fazla çizimle sonuca varma	Tutarlı basamaklar yapılandırma
İspatın doğruluğunun belirlenememesi	Mantıksal argümanlara sahip olmama	Çözüm için strateji geliştirme
Yüzeysel argümanlar oluşturma	Hızlıca sonuç çıkarma	Gerekçelendirmeleri durumun genel yönleriyle belirleme



### 2.5. Geçerlik ve Güvenirlik

Nitel araştırma, insan yaşamını ve insanın sosyal dünyasına ait algı ve düşüncelerini anlamaya yönelik gerçekleştirilen bir araştırma türüdür. Araştırma sürecinde söz konusu insan ve sosyal yaşamı olduğundan araştırma sonuçlarının gerçeğe uygun, nesnel, kesin ve tutarlı olması nitel araştırmacıların önde gelen çabalarından biridir. Bu sebeple nitel araştırmalarda nesnellik ve kesinlik bulguların gerçekliğe uygunluğunu belirten iç geçerlik, genellenebilirliği belirten dış geçerlik, zaman içinde tutarlılığı belirten güvenirlilik ilkelerini sağlamaktadır (Guba & Lincoln, 1994). Araştırmada geçerlik ve güvenirliliği artırmak için çeşitleme yani triangulation, meslektaş değerlendirmesi, uzun süreli iletişim kurma, katılımcılardan alınan denetim izi, tekrarlı sorgulama, yansıtıcı yorumlama, gönüllü katılım şansı, teknikleri kullanılabilir (Arastaman, Öztürk Fidan & Fidan, 2018; Creswell & Miller, 2000; Denzin & Lincoln, 2005; Patton, 2002; Shenton, 2004; Thomas & Nyce, 1998). Bu araştırmanın verileri uzun soluklu olarak, geniş bir zaman dilimine yayılarak toplanmış olup veriler toplanırken devamlı bir karşılaştırma çabasına girilmiştir. Farklı örneklem gruplarından ve birden fazla veri toplama aracı kullanılarak durumlara ait detaylı bilgilere ulaşılmaya çalışılmıştır. Elde edilen sonuçlar en doğru kategorilere ulaşabilmek adına her iki araştırmacı tarafından ikişer defa okunmuş; görüşme kayıtları da her iki araştırmacı tarafından yazıya dökülmüştür. Araştırmacıların elde edilen kategorilere ait yansıtıcı yorumlamaları da bir diğer araştırmacı tarafından eleştirel olarak değerlendirilmiş ve literatüre de dayanarak en doğru yoruma ulaşılmaya çalışılmıştır. Online olarak yürütülen görüşme süreci aynı zamanda kayıt altına alınmıştır. Katılımcıların anketlerde verdikleri yanıtlar tablolastırma ile ya da doğrudan alıntılar ile bulgularda gösterilmiştir. Elde edilen araştırma sonuçları katılımcılar ile de paylaşılmıştır. Sonuç olarak verilerin gerçeği yansıtırma durumu, birbiriyle tutarlı olması gibi önemli etkenler üzerinde durularak geçerlik ve güvenirlilik sağlanmaya çalışılmıştır. Bulgular bölümünde belirtilen doğrudan alıntılara ait gerçek olmayan isimler etik kurallar gözetilerek araştırmacılar tarafından verilmiştir. Okuyucuların akıştan kopmaması ve çalışmayı daha gerçekçi bir biçimde zihninde anlamlandırabilmesi için böyle bir yol tercih edilmiştir.

### 2.6. Araştırma Etiği

Araştırmanın yürütüldüğü il göz önüne alınarak gerekli üniversitenin etik kurulundan araştırma izni alınmıştır. Tüm süreç etik kurallar göz önünde bulundurularak yürütülmüştür. Buna ek olarak öğrenciler, veliler ve öğretmen çalışmanın amacı ve süreci hakkında bilgilendirilmiştir. Çalışma gönüllülük esaslı yürütülmüştür. Dahil edilmek istenen katılımcıların gönüllü olma durumları önemsenmiştir. Veri toplama sürecinde sınıfın doğal eğitim öğretim sürecinin bozulmamasına özen gösterilmiştir. Elde edilen veriler araştırmacı ve sınıf öğretmeni dışında başka hiç kimse ile paylaşılmamış ve katılımcılara ilişkin kişisel bilgiler korunmuştur.

## 3. BULGULAR

### Birinci Alt Probleme İlişkin Bulgular

Araştırmada sınıf öğretmeni ve adaylarının ispat ile ilgili görüşlerini belirlemek amacı ile sorulan “Sizin için ispat nedir? Matematikte ispat yapmaktan ne anlıyorsunuz? Açıklayınız.” sorusuna 16 sınıf öğretmeni ve 12 öğretmen adayının verdiği yanıtlara ait bulgular tablo 4. de sunulmuştur

**Tablo 4:** Katılımcılara Göre İspatın Anlamı

Öğretmenlerin Görüşleri	f	%	Öğretmen Adaylarının Görüşleri	f	%
Doğruluğu kanıtlama	9	30	Nedeniyle açıklama	5	41,66
Bilgiye güveni artırma	5	16,66	Anlamlandırma	4	33,33
Nedeniyle açıklama	4	13,33	Doğruluğu kanıtlama	3	25
Somut delillerle ortaya koyma	4	13,33	Somut delillerle ortaya koyma	3	25
Doğrulama	3	10	Nesnelleştirme	3	25
Anlamlandırma	2	6,66	Sağlama	1	8,33
Sağlama	2	6,66	Belirsizliği giderme	1	8,33
Ezberci eğitimi engelleme	1	3,33			
<b>Toplam</b>	<b>30</b>	<b>100</b>	<b>Toplam</b>	<b>12</b>	<b>100</b>

Tablo 4'e göre öğretmenler büyük çoğunlukla ispatın doğruluğu kanıtlama; öğretmen adayları ise büyük çoğunlukla nedeniye açıklama anlamına geldiğini belirtmiştir. Her iki grubun yanıtlarında çok sayıda ortak kavramlar olmasına rağmen bazı farklılıklar da olduğu görülmektedir. Öğretmen adayları öğretmenlerden farklı olarak nesnelleştirme ve belirsizliği giderme anlamlarını belirtmişlerdir. Öğretmenler ise adaylardan farklı olarak bilgiye güveni artırma, ezberci eğitimi engelleme anlamlarını belirtmişlerdir. Bu bulgulara ilişkin örnek olarak iki öğretmen ile iki öğretmen adayının yanıtı aşağıda gösterilmiştir.

İspat delil getirir. Bir olgu yada olayın gerçekliğini delillerle ortaya koymaktır. Ortaya çıkan sonuçların doğruluğunu kanıtlamaktır.

**Şekil 1:** Melek öğretmenin yanıtı

İspat bir şeyi kanıtlamaktır. Sadece matematik alanında değil herhangi bir konuda savunulan fikrin kanıtlarla gerçek olduğunun ortaya konulmasıdır. Böylece savunulan düşünce ya da formül herkesçe kabul edilebilir hale gelecektir. İspat olmadan bir düşünce, formül nesnellik kazanamaz.

**Şekil 2:** Beyza'nın yanıtı

2) Bir problemin, formülün vs. doğruluğunu göstermek için çoğunluğu mantığa dayalıdır. Mantığa aykırı olan kabul edilemez. Matematikte ispatı yoksun doğru değildir.

**Şekil 3:** Yavuz öğretmenin yanıtı

2. Matematiksel ispat yapmanın amacı bence anlamayı sağlamaktır. Bir olgunun doğruluğunun yanında neden doğru olduğu da önemlidir.

**Şekil 4:** Samet'in yanıtı

Şekil 1'de ve Şekil 3'te belirtilen doğruluğu kanıtlama ve somut delillerle ortaya koyma kıdem yılı yüksek öğretmenlerin en sık belirttiği ispat görüşleri olmuştur. İspat görüşlerinin cinsiyete dair farklı yanıtlar oluşturmadığı da bulgular arasındadır. Araştırmanın birinci

problemi dâhilinde sorulan diğer bir soru, matematiksel ispatın özelliklerine ilişkin katılımcıların görüşlerini almaya dayalıdır. Buna dair elde edilen bulgular Tablo 5'te gösterilmiştir.

**Tablo 5.** Katılımcılara Göre Matematiksel İspatın Özellikleri

Öğretmenlerin Yanıtları	f	%	Öğretmen Adaylarının Yanıtları	f	%
Anlaşılabilirlik	7	25	Anlaşılabilirlik	4	20
Evrensellik- nesnellik	4	14,28	Evrensellik- nesnellik	4	20
Somutlaştırılabilirlik	4	14,28	Tutarlılık	3	15
Tutarlılık	4	14,28	Ayrıntılı olma	2	10
Çelişkilerden arınmış olma	3	10,74	Sınıf düzeyine uygun olma	2	10
Denenebilirlik	2	7,14	Çelişkilerden arınmış olma	1	5
İnandırıcılık	2	7,14	Sıralı aşamalardan oluşma	1	5
Sınıf düzeyine uygunluk	1	3,57	Geçerli olma	1	5
Çözümünebilme	1	3,57	İnandırıcılık	1	5
			Keşfetme	1	5
<b>Toplam</b>	<b>28</b>	<b>100</b>		<b>20</b>	<b>100</b>

Tablo 5'e göre katılımcılar matematiksel ispatın özelliklerini anlaşılır olma, tutarlı olma, somutlaştırma, evrensel-nesnel olma yanıtlarını vermişlerdir. Adayların öğretmenlerden farklı olarak geçerli olma, sıralı aşamalardan oluşma ve ayrıntılı olma yanıtlarını verdikleri görülmüştür. Öğretmenlerin ise adaylardan farklı olarak somutlaştırılabilirlik ve denenebilirlik kavramlarını belirtmişlerdir. İspatın anlaşılır olma özelliği her iki araştırmacı türü tarafından en sık verilen cevap olmuştur. Bulguya ilişkin örnek olarak öğretmen iki ile iki adayın yanıtı eklenmiştir. İspatın anlaşılır olma özelliği genellikle kıdem yılı az olan öğretmenler tarafından verilirken evrensellik özelliği kıdem yılı yüksek öğretmenler tarafından bildirilmiştir.

Tutarlı, herkes tarafından aynı sonucu ulaşılabilmek özelliğine sahip olursa ispat olur.

**Şekil 5:** Fatma öğretmenin yanıtı

- Akılcı olması  
- Somut olarak gösterilebilmesi  
- Kanıtlanabilir olması gerekir.

**Şekil 6:** Zeynep'in yanıtı

- Yeteri kadar veri içermeli,  
- Bu veriler bilimsel dayanağı olmalı. (Herkesçe kabul edilmeli.)  
- Aşamalar kendi içerisinde sıralı olmalı.

**Şekil 7:** Feyza'nın yanıtı

Akla mantığa uygun yapılması  
Tekrar yapılabilir olması  
Her ispat sonucunda aynı sonuca ulaşılabilmeli.

Şekil 8: Yavuz öğretmenin yanıtı

## 2. İkinci Alt Probleme İlişkin Bulgular

Araştırmanın ikinci sorusunda katılımcıların ispat şemalarını değerlendirebilmek için iki açık uçlu soru ve beş problem sorulmuştur.

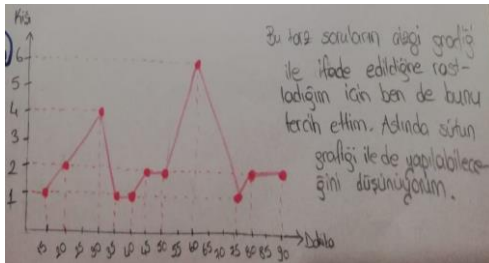
### 2.1. Katılımcıların ispat şemalarının değerlendirilmesine dair bulgular

Araştırma kapsamında sorulan her bir problem daire, sütun, şekil ve çizgi grafikleri, histogram, sıklık tablosu veya ağaç diyagramı oluşturmayı amaçlamaktadır. Katılımcıların ispat şemaları değerlendirilirken beş problem çözümü de önce ayrı ayrı çözümlenmiş ve kategorileştirilmiştir.

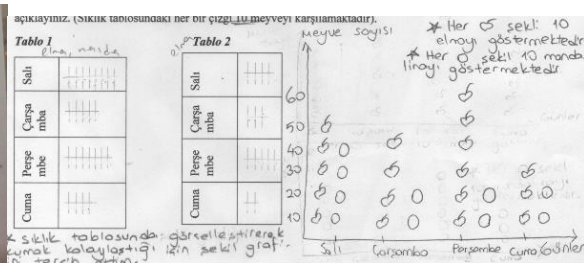
Tablo 6. Katılımcıların İspat Şemaları

İspat Şemaları	Öğretmenler (f)	Öğretmen Adayları (f)
Dışsal şema	4	3
Deneysel şema	6	5
Analitik şema	6	4
<b>Toplam</b>	<b>16</b>	<b>12</b>

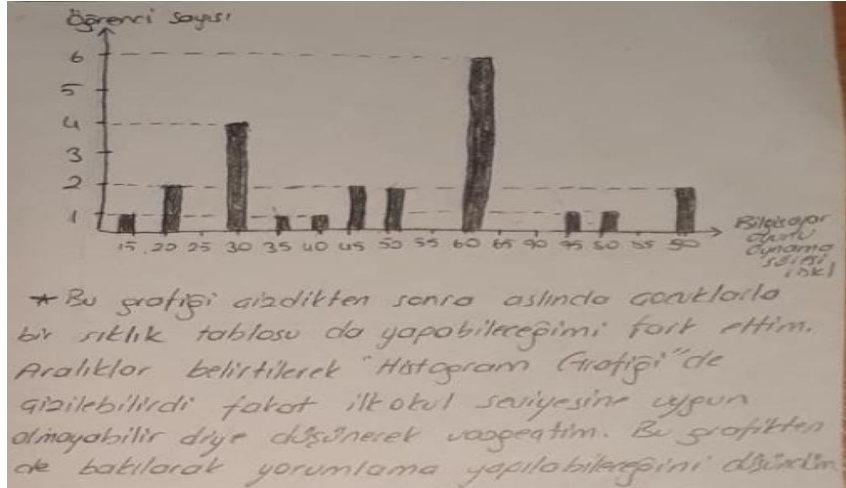
Tablo 6'ya öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının ispat şemalarına ait bulgular verilmiştir. Öğretmenlerin büyük çoğunlukla deneysel ve analitik ispat şemasında olduğu; öğretmen adaylarının büyük çoğunlukla deneysel ispat şemalarına sahip olduğu görülmektedir. Bu bulguya göre öğretmenler ve öğretmen adayları arasında belirgin farklılıklar olmadığı görülmektedir. Öğretmenler arasında daha uzun yıllardır mesleğini yerine getirenlerin genellikle analitik ya da deneysel ispat şemasında olduğu belirlenmiştir. Örnek olarak Emir öğretmenin çözümlerinden biri aşağıda gösterilmiştir. Öğretmen adaylarının ispat şemalarının kişisel özelliklerine göre değişmediği diğer bulgular arasındadır. Bu bulgulara örnek olarak aşağıda deneysel, analitik ve dışsal şemalara uygun olduğu tespit edilen yanıtlar gösterilmiştir.



Şekil 11: Tuğba'nın yanıtı (dışsal şema)

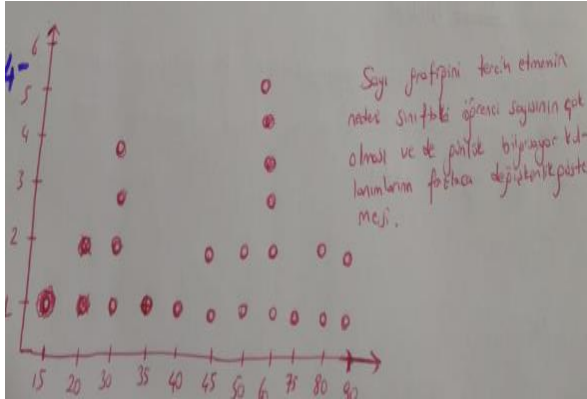


Şekil 12: Emir öğretmenin yanıtı (analitik şema)

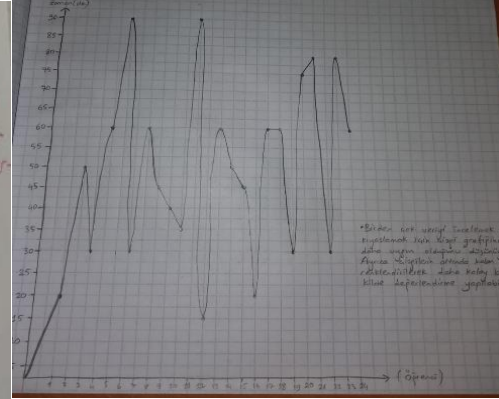


Şekil 13: Yelda öğretmenin yanıtı (deneysel şema)

Öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının en çok yanlış yaptığı ya da boş bıraktığı problem, histogram grafiği oluşturmayı gerektiren problemidir. Buna ek olarak öğretmenlerin yanlış yaptığı problemlerden bir diğeri de daire grafiği oluşturmayı gerektiren problemidir. Yanlış yanıtlara ilişkin örnekler de aşağıda sunulmuştur:



Şekil 14: Elif öğretmenin yanıtı



Şekil 15: Levent'in yanıtı

## 2.2. Görüşme sonuçlarına ait bulgular

Katılımcıların çözümlerine ilişkin değerlendirmeler sonucunda 3 öğretmen ve 3 öğretmen adayı ile online görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşme sorularından biri, en çok zorlanan problemin hangisi olduğu ve sebebine yönelik idi. Görüşmelere ait araştırmacı-öğretmen arasındaki bir konuşma aşağıdaki örnekle gösterilmiştir:

Araştırmacı: Çözdüğünüz problemler içinde sizi en çok zorlayan hangisi oldu?

Yavuz öğretmen: Beşinci soru beni en çok zorlayan soru oldu. Çetele tablosunu öğrencilerime nasıl aktaracağımı uzun uzun düşündüm.

Araştırmacı: Neden böyle olduğunu düşündünüz?

Yavuz öğretmen: Çünkü öğrencilere bir şeyler anlatırken rastgele bir şekil, grafik, tablo oluşturamazsınız. Oluşturduğunuz şekli öğrencilerin rahatça anlayabiliyor olması gerekmektedir. İlişkiyi net bir şekilde görmeleri gerekir, sınıfın iyilerinin değil hepsinin görmesi gerekir. Bu nedenle beşinci soru hem zorladı hem de daha çok düşünmeme neden oldu.

Görüşmelere ait araştırmacı-öğretmen arasındaki bir konuşma aşağıdaki örnekle gösterilmiştir:

Araştırmacı: Çözdüğünüz problemler içinde sizi en çok zorlayan hangisi oldu?

Zeynep: Beni dördüncü ve beşinci soru zorladı diyebilirim. Çünkü verilen çetele tablolarındaki ifadeleri anlamakta başta güçlük çektim. Histogram grafiğini de fazla kullanmadığımız için aklıma gelmedi açıkçası.

Araştırmacı: Beşinci soruda rakamlar mı karışık gelmişti? Neyi anlamakta zorlandınız?

Zeynep: Çetele tablosunda yalnızca her beş birim yatay çizgiyle belirtiliyor diye hatırladığım için tablodaki çizgilerin kaç birimi ifade ettiğini bu yüzden ilk bakışta anlayamadım. Daha sonra algıladığım şekilde soruyu cevaplandırdım.

Araştırmacı: Yatay çizgilerin beş tane mi olması gerekiyor?

Zeynep: Öyle hatırlıyorum.

Araştırmacı: Histogram grafiğini daha önce kullanmadığınız için mi aklınıza gelmedi? Yaptığınız yanıtın yanlış olduğunun farkında mıydınız yani?

Zeynep: Hayır hayır. O an doğru geldiği için yanıtladım tabiki ama sonradan doğrusunu öğrenince aklıma geldi o tarz sorularda histogram oluşturduğumuz.

Beşinci soru, çetele ve sıklık tablosu oluşturmayı ve birbiri arasındaki ilişkiye odaklanan sorudur. Hem öğretmenler hem adaylar bu soruda zorlandığını ifade etmişlerdir. Buna örnek olarak bir öğretmen: “Verilen problemlere uygun grafiği seçme konusunda zorlandım. Birden çok grafikte de gösterilebilir gibi hissettim açıkçası karar verme de zorlandım” Yanıtını vermiştir. Öğretmenlerin yanıtlarına benzer olarak iki öğretmen adayı da beşinci soruda zorlandıklarını ifade etmişlerdir. Ayrıca çetele tablosuyla ilgili kavram yanlışlığı olduğu dikkat çekici olmuştur. Histogram grafiği gerektiren soruda da zorluk çekmiş olmaları incelenen problem çözümlerinden sonra beklenen bir sonuç olmuştur. Çünkü histogram gerektiren problemi yanlış yapan katılımcı sayısı oldukça fazlaydı. Hem adaylar hem öğretmenler bu konuda zorlandıklarını açıkça dile getirmişlerdir.

Araştırmada kullanılan anket formunda belirtildiği üzere katılımcılardan veri işleme alanında bir problem oluşturmaları ve sonucunu ispatlayarak çözmeleri istenmişti. Sonuçta da bazı katılımcıların işlemsel bilgilere odaklandıkları, bazılarının ise somut materyallere dayanarak sonucu açıkladıkları bulgular bölümünde belirtilmişti. Buna yönelik görüşme sürecinde katılımcılara “Çözümlerinizi ispat temelli öğretime dayandırdığınızı düşünüyor musunuz?” sorusu sorulmuştur. Görüşme yanıtlarında ise hem öğretmenlerin hem öğretmen adaylarının yazdıkları sonuçların ispat temelli öğretime dayandırdıklarını düşündükleri görülmüştür. Katılımcıların büyük çoğunluğunun işlemsel bilginin de ispat temelli sayıldığına ilişkin görüş bildirmesi dikkat çekici olmuştur.

Görüşmede sorulan diğer bir soru matematik konularında ispat temelli öğretimin kullanılmasına yönelik katılımcıların görüşlerini almaya yöneliktir. Araştırmacı ve bir öğretmen arasında geçen diyalog örneği:

Araştırmacı: *Diğer konularda da ispat temelli öğretimi kullanmak ister misiniz?*

Yelda öğretmen: *Neden olmasın! Ancak her öğrenciye tek tek neden böyle yaptın açıkla ispatla falan dersek ohooo buna süre yetmez ki. Bu yöntemin çok faydalı olduğunu düşünsem de pratikte çok kullanışlı olmadığını düşünüyorum.*

*Araştırma: Özellikle hangi konularda kullanmanın etkili olacağını düşünüyorsunuz? Mesela kesirler mi geometri mi? Hangisi?*

*Yelda öğretmen: Bence problem içeren her konuda kullanılabilir. Geometride özellikle somut araçlarla çok güzel ispatlar yapılabilir aslında.*

Örnek diyalogda da görüldüğü üzere öğretmenler genel olarak ispat temelli öğretimin etkililiğini farkında olup diğer konularda da kullanmak istediklerini ifade etmişlerdir. Bununla birlikte uygulamada zaman konusunda sorun yaşayabileceklerine de inanmaktadırlar. Öğretmen adaylarından elde edilen görüşme bulguları da farklı değildir. Ancak ispat temelli öğretimin kullanılması konusunda adayların öğretmenlere göre daha çekingen biçimde yanıt verdikleri görülmüştür.

### SONUÇ VE TARTIŞMA

İspat temelli öğrenme akıl yürütme, sorgulama, gerekçelendirme, argüman üretme, mantıksal çıkarımlarda bulunma, esnek ve yaratıcı düşünme gibi birçok düşünme becerisini kapsayan etkili bir düşünme becerisidir. Sınıf öğretmenlerinin ve sınıf öğretmeni adaylarının ispat konusundaki görüşleri ile ispat şemalarının incelendiği bu çalışmada çeşitli sonuçlara ulaşılmıştır. Elde edilen bulgulara göre öğretmenler büyük çoğunlukla ispatın doğruluğu kanıtlama; öğretmen adayları ise büyük çoğunlukla nedeniyle açıklama anlamına geldiğini belirtmiştir. Öğretmen adayları öğretmenlerden farklı olarak nesnelleştirme ve belirsizliği giderme anlamlarını belirtmişlerdir. Öğretmenler ise adaylardan farklı olarak bilgiye güveni artırma, ezbere dayalı öğrenmeyi engelleme anlamlarını belirtmişlerdir. Öğretmenlerin, ispatın ezbere dayalı öğrenmeyi engelleyici olmasına vurgu yapmasının sebebi; sınıf içerisinde öğrencilerin matematiksel durumlara karşı tavrının bu yönde olmasının farkında olmaları ve bunu önlemeye yönelik olarak gerekçelendirmenin alternatif bir çıkış olabileceğini düşünmeleri olabilir. Yapılan görüşmeler sonucunda da öğretmenlerin genel olarak ispat temelli öğretimin etkililiğini farkında olup diğer konularda da kullanmak istedikleri görülmüştür. Bununla birlikte uygulamada zaman konusunda sorun yaşayabileceklerine de inanmaktadırlar. Alan deneyimleri göz önünde bulundurulduğunda öğretmenlerin zaman konusunda endişe yaşamaları oldukça normal karşılanmıştır. Öğretmen adayları ispat temelli öğretimin kullanılması konusunda daha çekingen davranmış olup bunun alan deneyimlerinin olmamasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Araştırmada diğer bir soru olan matematiksel ispatın özellikleri konusundaki soruya ilişkin veriler toplanmıştır. Buna ilişkin katılımcılar anlaşılır olma, tutarlı olma, somutlaştırma, evrensel-nesnel olma yanıtlarını vermişlerdir. Adayların öğretmenlerden farklı olarak geçerli olma, sıralı aşamalardan oluşma ve ayrıntılı olma; öğretmenlerin ise adaylardan farklı olarak somutlaştırılabilirlik ve denenebilirlik yanıtlarını verdikleri görülmüştür. Yapılan görüşmelerde de hem öğretmenlerin hem öğretmen adaylarının problem çözümlerini ispat temelli öğretime dayandırdıklarını düşündükleri görülmüştür. Katılımcıların büyük çoğunluğunun işlemsel bilginin de ispat temelli sayıldığına ilişkin görüş bildirmesi dikkat çekici olmuştur. Literatürde yer alan çalışmaların çok büyük çoğunluğu matematik öğretmenleri ve adayları ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmalar öğretmen adaylarının ispatı bir tür problem çözme yaklaşımı ile doğruluğunun herkesçe kabul edilmesi (Contay & Duatepe Aksu, 2019; Doruk & Kaplan, 2013; Güler, 2013; Uygan vd., 2014), matematiksel işlemler

süreci ve neden sonuç ilişkisi ile bilgi aktarma (Köğce & Yıldız, 2011) ve doğruluğu gösterme (Güler & Dikici, 2012; Pair & Calva, 2020) olarak değerlendirdiklerini belirtmişlerdir. Öğretmenlerin ise ispatın iddianın doğruluğunu ortaya çıkarma, açıklama, keşfetme anlamlarına vurgu yaptığı görülmektedir (Goetting, 1995; Knuth, 2002, Mingus & Grassl, 1999; Pair & Calva, 2020). Bu araştırmada literatürden farklı olarak katılımcıların problem çözme kavramına ve keşfetme yanıtına değinmedikleri dikkat çekici olmuştur.

Oluşturulan problemin çözümüne ve ispatına ilişkin bulgular incelendiğinde katılımcıların çok büyük çoğunluğunun bir grafik verip, soruları bu grafiğe ilişkin cevaplandırılmasını içeren bir problem oluşturdukları görülmüştür. Katılımcıların çoğunlukla şekil, sütun ve çizgi grafikleri oluşturduğu; dört öğretmenin problemde sıklık tablosuna yer verirken öğretmen adaylarının sıklık tablosunu hiç kullanmadığı; yalnızca bir öğretmen ve bir öğretmen adayının daire grafiği oluşturduğu ve son olarak hiçbir katılımcının sürekli verilerden oluşan histogram grafiğine problemlerinde yer vermedikleri görülmüştür. Bunlara ek olarak, bazı öğretmenlerin problemde yer verdiği noktalı grafiğin; bir öğretmen adayının oluşturduğu yüzde probleminin de ilkökul ders kitaplarında yer almadığı belirlenmiştir. Bu sonuç, katılımcıların matematik konusunda alan bilgisi eksikliği yaşadığını göstermektedir. Yapılan çalışmalar da öğretmen adaylarının matematiksel bilgilerinin ilköğretim düzeyinde öğretim yapabilmeleri için yetersiz olduğunu göstermiştir (Ball, 1990; Toluk Uçar, 2009). Ayrıca veri işleme öğrenme alanı kapsamında sınıf içinde öğrenciler arası matematiksel söylemlerin oluşabilmesi için öğretmenlerin kullandığı soruların türlerinin etkili olduğu tespit edilmiştir (Baki & Çelik, 2018). Bu noktada, öğretmen adaylarının ileride kısıtlı matematik bilgisi ve kavram yanlışlarının öğrencileri de etkileyeceği düşünülerek lisans eğitimi boyunca güçlü bir alan bilgisi ile donatılması gerekmektedir (Ball & McDiarmid, 1990). Çünkü etkili bir matematik öğretimi, matematiği anlamayı ve bilmeyi gerektirir (NCTM, 2000).

Oluşturulan problemlerin büyük çoğunluğunun öğrencilerin günlük hayatlarında kullandıkları nesnelere ilişkin olduğu ya da favori bağlamını içeren sorulardan olduğu tespit edilmiştir. Problemlerin sonucuna dair açıklamalar incelendiğinde öğretmenlerin büyük çoğunluğunun işlemsel olarak çözümü açıkladığı görülmüştür. Buna ek olarak modeller kullanarak sonucu açıklayan öğretmenler de bulunmaktadır. Öğretmen adaylarının yanıtları incelendiğinde ise işlemsel açıklama, model ile açıklama, aşamalı açıklama, detaylı açıklama, sağlama ile çözüme ulaşma ve açıklama yapmadan yalnızca çözüme yanıtları görülmektedir. Bu konuda çalışan araştırmacıların bulgularına göre öğretmenler ve öğretmen adaylarının ispat yöntemlerini yanlış ifade ettikleri (Güler vd, 2012, Stylianides vd., 2007, Zaimoğlu, 2012); çok sayıda öğretmenin ispatın konusunda bilgi eksikliği yaşadığı ve iddiayla alakalı örnekler üzerinden yapılan açıklamaları ispat olarak kabul ettikleri (Goetting, 1995; Healy & Hoyles, 2000; Knuth, 2002); öğretmenlerin ispat sürecinde gerekçelendirme düşüncesinden ziyade problem çözme düşüncesi ile hareket ettikleri ve ezber yöntemlerle çözüme ulaştıklarına dair sonuçlar bulunmaktadır (Dede & Karakuş, 2014; Güven, Çelik & Karataş, 2005; Öztürk & Kaplan, 2019; Öztürk vd., 2019).

Araştırmada elde edilen diğer bir sonuç, katılımcıların çetele ve sıklık tablosu oluşturmayı gerektiren ve birbiri arasındaki ilişkiye odaklanan soruda daha çok zorlandıklarıdır. Sıklık tablosu ders kitaplarında çetele tablosu ile birlikte verilerek bu tablolardaki bilgileri kullanıp grafik oluşturmayı hedefleyen sorular ve anlatımlar



bulunmaktadır. Bir araştırma sonucuna göre öğrenciler de benzer olarak sıklık tablosunda zorluk yaşamakta ve sıklık tablosu ile sütun grafiğini ayırt etmede de bir takım sorunlar yaşadıkları tespit edilmiştir (Hacısalıhoğlu Karadeniz,2016). Bu sonuçlar, öğrencilerin de öğretmenlerin de tablo ile grafik kavramlarını zihinlerine yeterince yerleşmemiş olmasından kaynaklanmış olabilir. Bu çalışmada katılımcıların yanıtları incelendiğinde öğretmenler ve adaylar arasında kayda değer bir farklılığın olmadığı göze çarpmaktadır. Ancak öğretmenlerin, alanda çalışmaları ve deneyimli oldukları da göz önünde bulundurulduğunda öğretmen adaylarına göre daha detaylı ve anlama odaklı açıklama yapmaları beklenmekte idi. Bu sonuç, öğretmenlerin yenilikçi bir yaklaşımla hareket etmediği, yapılandırmacı yaklaşıma uygun olarak uygun ortam oluşturma eyleminde bulunmadığı ve bilgiyi öğrenciye sunan konumunda olduğu bulgularını doğrulamaktadır (Knuth, 2002; Yoo, 2008). Ayrıca bu sonuç öğretmenlerin, kendi öğrencilik hayatında edindikleri matematik alışkanlıklarını hala devam ettirdikleri şeklinde yorumlanabilir.

Araştırmada elde edilen diğer bir bulguya göre öğretmenlerin büyük çoğunlukla deneysel ve analitik ispat şemasında olduğu; öğretmen adaylarının büyük çoğunlukla deneysel ispat şemalarına sahip olduğu görülmektedir. Bu bulguya göre öğretmenler ve öğretmen adayları arasında belirgin farklılıklar olmadığı görülmektedir. Yapılan birçok araştırma öğrencilerin genel olarak dışsal ve deneysel şemaları analitik şemalara göre daha fazla kullandıklarını göstermektedir (Yıldız & Şengül 2017; Arslan, 2007; Harel & Sowder, 1998; İskenderoğlu, 2003; Neria & Amit, 2004; Ören, 2007). Bu durum, kişilerin yaptıkları işlemlerin ve ulaştıkları sonucun ne anlama geldiğini sorgulamadıklarını ve doğal olarak istenen anlama ve düşünme yollarını geliştiremediklerini göstermektedir. Uygun vd. (2014) göre öğretmen adayları kendilerine verilen teoremin öncülleri üzerinde akıl yürütmeden önce, bazı kanıt yöntemlerini ezberle şekilde kullanma eğilimi göstermektedirler. Bu gösterge ise, öğretmen adaylarının kanıt yapma ve değerlendirme sürecinde izledikleri yaklaşımların dışsal kanıt şemasını yansıttığına işaret etmektedir (Harel & Sowder, 1998). Bu sonucun gerekçesi olarak, alan derslerinde tanım – teorem – kanıt sırasını takip eden ve öğretmen merkezli olarak yapılan ispat öğrenimlerinin öğretmen adaylarına akıl yürütmeden çok ezberleme alışkanlığı kazandırmış olabileceği düşünülmektedir (De Villiers, 2003; Güven ve Karataş, 2005; NCTM, 2000).

Katılımcıların en problem histogram oluşturma ile çetele-sıklık tablosu oluşturma soruları idi. Histogram grafiği, diğer grafik türleri ile karşılaştırıldığında daha az kullanılan grafik türüdür (English,2018). Sürekli verileri içermesi ve grafiğin oluşturulmasında aralık sayısının belirlenmesi gerektiği için histogramın diğer grafiklerden daha az tercih edildiği ve daha zorlayıcı olduğu düşünülmektedir. Yapılan görüşmeler sonucunda katılımcıların beşinci soru olan çetele ve sıklık tablosu oluşturma sorusunda zorlandıkları ve bu konuda kavram yanılgısı yaşadıkları görülmüştür. Görüşmede sorulan son sorunun yanıtına göre ise katılımcılar genel olarak diğer matematik konularında da ispat temelli öğretimi kullanmak istediklerini dile getirmişlerdir. Buna ek olarak öğretmenler uygulamada zaman konusunda sorun yaşayabileceklerine de inanmaktadırlar. Öğretmen adaylarından elde edilen görüşme bulguları da farklı değildir. Ancak ispat temelli öğretimin kullanılması konusunda adayların öğretmenlere göre daha çekingen biçimde yanıt verdikleri görülmüştür. Bu durum, öğrencilerin alan deneyimlerinin olmaması ya da çok sınırlı olmasından kaynaklı olarak uygulamada ne gibi sorunlar yaşayacaklarını öngörememelerinden kaynaklanmış olabilir. Bununla birlikte

matematik öğretim programında birinci kademedeki ispata, gerekçelendirmeye veya genellemeye dayanan kazanımların yer almaması; sınıf öğretmeni adaylarının da ders içeriklerinde ispat ile ilgili herhangi bir durumla karşı karşıya kalmamış olması olabilir.

Bu araştırmada, alandaki diğer çalışmalardan farklı olarak örneklem grubunun sınıf öğretmenlerinden ve öğretmen adaylarından oluşması söz konusudur. Literatürde bulunan araştırmaların büyük çoğunluğunu matematik öğretmeni ya da adaylarından oluştuğu görülmektedir. Benzer olarak ortaokul ve lise öğrencileri ile çalışılan birçok çalışma mevcuttur. Bu durum, sınıf öğretmenleri ile benzer çalışmalar gerçekleştirilmesi gerektiğini vurgular niteliktedir. İlkokul matematik eğitimi ileri düzeylerdeki matematiğin temelini oluşturmaktadır. Bu sebeple ilköğrencilerinin, sınıf öğretmenlerinin ve hatta geleceğin öğretmeni olan adayların düşünme ve anlama yollarının ortaya çıkarılması ve bu sayede ders içeriklerinin ve matematik öğretiminin gelişimi bağlamında alana katkı sağlayabilecektir. Sınıf öğretmeni adaylarının lisans döneminde aldığı Matematik Öğretimi dersi ve Temel Matematik dersleri içeriğinin ispat ve gerekçelendirme ile zenginleştirilerek aktarılması ve adaylara ispatın gerekliliği bilincinin kazandırılması önemli görülmekte ve önerilmektedir. Alternatif ispat yolları kullanmanın öğrencilerin anlamalarını geliştireceği (Demircioğlu & Polat, 2016) göz önünde bulundurulduğunda yalnızca doğrulama kültürünün kazandırılması değil aynı zamanda farklı yollar ile hem lisans dönemindeki öğretmen adaylarının hem de öğrencilerin ispat yapmaları için teşvik edilmelidir.

Son olarak, bu araştırma belli sınırlılıklar altında yürütülmüştür. Bu sınırlılıklardan biri çalışmanın katılımcı sayısıdır. Gelecekte yürütülecek araştırmacılara daha büyük bir örneklem grubunun ispat şemalarının incelenmesi ve müdahale içeren çalışmaların yapılması önerilmektedir. Araştırmanın bir diğer sınırlılığı ise verilerin online olarak toplanması, pandemi sebebiyle yüz yüze veri toplama sürecinin gerçekleşmemesidir. Bu noktada, dünyayı etkileyen COVID-19 virüsünün sebep olduğu pandemi sürecinin sona ermesi sonucunda nitel araştırmanın doğasına uygun olan etkileşimli veri toplama süreciyle ispat konusunda çeşitli araştırmalar yapılması önerilmektedir.

### KAYNAKÇA

Arastaman, G., Öztürk Fidan, İ. Fidan, T. (2018). Nitel Araştırmada Geçerlik ve Güvenirlik: Kuramsal Bir İnceleme. *YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi* 15(1),37-75. doi.org/10.23891/efdyu.2018.61

Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, 35(156), 17-31.

Aydoğdu İskenderoğlu, T. (2003). *Farklı sınıf düzeylerindeki öğrencilerin matematik problemlerini kanıtlama süreçleri*, (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bolu.

Bakırcı, S. (2014). *İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin olasılıkla ilgili problem çözme süreçlerinin incelenmesi üzerine nitel bir çalışma*. (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Baki, A.(2019). *Matematiği öğretme bilgisi*. Ankara: Pegem Yayıncılık.

Baki, A. ve Çelik, S. (2018). Veri işleme öğrenme alanına yönelik sınıf içindeki söylemlerin matematiksel dil bağlamında incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 9, (2), 283-31. DOI: 10.16949/turkbilmat.332686

Ball, D. (1990a). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal*, 90 (4), 449-466.

Ball, D. L., & McDiarmid, G. W. (1990). The subject-matter preparation of teachers. In W. R. Houston.

Balacheff, N. (1988). *Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics*. İçinde En Pimm D. (Ed.), Mathematics, teachers and children. 216-235. London: Hodder and Stoughton.

Bayazıt, İ. (2017). İspatın önemi ve ispat konusundaki öğretmen yeterliklerinin incelenmesi. *Turkish Studies*, 12 (14), 19-40.

Baykul, Y. (2009). *İlköğretimde matematik öğretimi 6-8. sınıflar*. Ankara: Pegem Press.

Borovenik, M. & Peard, R. (1996). Probability. In A.J. Bishop (Ed.). *International handbook of mathematics education*, Netherlands. Kluwer Academic Publishers. 239-287.

CadwalladerOlsker, T. (2011). What do we mean by mathematical proof? *Journal of Humanistic Mathematics* (1), 1. 33-60. DOI: 10.5642/jhummath.201101.04

CadwalladerOlsker, T. (2007). *Proof schemes and proof writing*. Claremont Graduate University, Claremont, CA.

Carlsson, B. (2002), Ecological understanding: Ways of experiencing photosynthesis. *International Journal of Science Education*, 24(7), 681-699.

Clements, D. H. (2001). Mathematics in the preschool. *Teaching Children Mathematics*, 7(5), 270-277. <https://doi.org/10.5951/TCM.7.5.0270>

Creswell, J. W., & Miller, D. L. (2000). Determining validity in qualitative inquiry. *Theory Into Practice*, 39(3), 124-130.

Cresswell, J.W. & Plano Clark V.L. (2014). *Karma yöntem araştırmaları tasarımı ve yürütülmesi* (Çev. Ed. Yüksel, D. ve Demir, S. B.). Ankara: Anı Yayıncılık.

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, 20(1), 41-53.

Çakmak, Z. T. (2014). *İlköğretim 6-8. sınıf matematik öğrencilerinin istatistik ve olasılık öğrenme alanında zorlandıkları kavram ve konuların belirlenmesi*. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bolu.

Çontay, E. (2016). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları. (Yayımlanmamış Doktora Tezi). Pamukkale Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Denizli.

Çontay, E. G. ve Duatepe-Paksu, A. (2019). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları ve bu şemaları ortaya koyan ifadelerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 10(1), 59-100.

Çoşkun, F. (2009). *Ortaöğretim öğrencilerinin Van Hiele geometri anlama seviyeleri ile ispat yazma becerilerinin ilişkisi*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Demircioğlu, H. ve Polat, K. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının "sözsüz ispatlar" ile yaşadıkları zorluklar hakkındaki görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(7), 81-99.

Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(2), 47-71. <https://doi.org/10.17984/adyuebd.52880>

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (2005). Introduction: The Discipline and Practice of Qualitative Research. In N. K. Denzin ve Y. S. Lincoln (Ed.). *The Sage Handbook of Qualitative Research* (3 rd). (s. 1-32). Thousands Oaks, CA: SAGE Publications, Inc.

Dereli, A. (2009). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin olasılık konusundaki hataları ve kavram yanlışlıkları*. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Eskişehir.

Doruk, M., ve Kaplan, A. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 2(1), 241-252.

English, L. D. (2018). Young children's statistical literacy in modelling with data. *Statistics in Early Childhood and Primary Education*. DOI:10.1007/978-981-13-1044-7\_17

Fiesbein, E. & Shcnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), 96-105.

Fonseca, L. (2018). Mathematical reasoning and proof schemes in the early years. *Journal of the European Teacher Education Network*. 13, 34-44.

Goetting, M. (1995). *The college students' understanding of mathematical proof*. Unpublished doctoral dissertation, University of Maryland, Maryland.

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1994). *Competing paradigms in qualitative research*. In N. K. Denzin ve Y. S. Lincoln (Ed.). *Handbook of Qualitative Research* (s. 105-117). Thousands Oaks, CA: SAGE Publications, Inc.

Güven, B. ve Özmen, Z.M. (2014). *Ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin grafik okuryazarlığı düzeylerinin belirlenmesi*. 11. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Adana, 264-268.

Güven, B., Çelik, D. ve Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi* (30), 35-45.

Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi*, (Yayımlanmamış Doktora Tezi), Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Güler, G. ve Dikici, r. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi* (2), 2. 571-590.

Hacısalıhoğlu Karadeniz, M., (2016). Beşinci sınıf öğrencilerinin veri işleme konusundaki kazanımlara ulaşabilme durumlarının belirlenmesi. *Mediterranean Journal of Humanities*, 221-236. DOI: 10.13114/MJH.2016119300

Hanna, G. (2002). Mathematical Proof. İçinde D.Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. (54-64). New York: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. & Villiers, M. (2008). Proof and proving in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 40, 329-336. DOI 10.1007/s11858-008-0073-4

Harel, G., ve Sowder, L. (1998). Students proof schemes: Results from exploratory studies, *CBMS Issues in Mathematics education*, 7, 234-283.

Harel, G. (1999). Students' understandings of proofs: A historical analysis and implications for the teaching of geometry and linear algebra, *Linear Algebra and Its Applications*, 302-303.

Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction Part II: With reference to teacher's knowledge base *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*.

Harel, G. (2013) Intellectual need Vital Direction for Mathematics Education Research ed K R Leatham (New York: Springer).

Harel, G., ve Sowder, L. (1998). Students proof schemes: Results from exploratory studies, *CBMS Issues in Mathematics education*, 7, 234-283.

Haylock, D. & Cockburn, E. (2014). *Understanding mathematics for young children*. (4th ed). Sage. Editör: Zuhâl Yılmaz

Healy, L., ve Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428. DOI: 10.2307/749651

Hunter, R. (2007). Can you convince me: Learning to use mathematical argumentation. In J. Woo, H. Lew, K. Park, D. Seo (Eds.). Proceedings of the 31st Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (Vol. 3, pp. 381-389). South Korea, The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

İskenderoğlu, A.T.(2003). *Farklı sınıf düzeylerindeki öğrencilerin matematik problemlerini kanıtlama süreçleri*. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları* (Yayımlanmamış doktora Tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 61-88.

Lee, W-I. (1999). *The relationship between students' proof writing ability and Van Hiele levels of geometric thought in a college geometry course* (Yayımlanmamış Doktora Tezi). University of Northern Colorado, USA.

Levy, A., Meletiou-Mavrotheris, M ve Paparistodemou, E. (2018). Statistics in early childhood and primary education: Supporting early statistical and probabilistic thinking.

Lockwood, E., Ellis, A.B. & Lynch, A.G. Mathematicians' Example-Related Activity when Exploring and Proving Conjectures. *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed.* 2, 165–196 (2016). <https://doi.org/10.1007/s40753-016-0025-2>

MEB (2018). T.C. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı İlkokul Matematik Dersi Öğretim Programı. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.

Memnun, D.S., Altun, M. ve Yılmaz A. (2010). İlköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin olasılıkla ilgili temel kavramları anlama düzeyleri. *Eğitim Fakültesi Dergisi* 23 (1), 11-29.

Merriam, S.B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. California: Jossey-Bass.

Mills, J.D. & Holloway C.E. (2013). The development of statistical literacy skills in the eighth grade: exploring the TIMSS data to evaluate student achievement and teacher characteristics in the United States. *Educational Research and Evaluation*, 19(4), 323-345. <http://dx.doi.org/10.1080/13803611.2013.771110>.

Mingus, T. & Grassl, R. (1999). Preservice teacher beliefs about proofs. *School Science and Mathematics*, 99(8), 438-444.

Monoyiou, A., Xistouri, X. & Philippou, G. (2006). Primary students' reasoning in problem solving and teachers' evaluation of their arguments. In Novotna, J., Moraova, H., Kratka, M. & Stehlikova, N. (eds.). Proceedings of the 30th Conference of the IGPME, 4, 177-184. Charles University in Prague.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: *National Council of Teachers of Mathematics*.

Neria ve Amit, 2004;Norby, K. (2013). *Investigating viable arguments: pre-service mathematics teachers' construction and evaluation of arguments* (Unpublished Doctoral Dissertation). Montana State University, Bozeman, Montana.

Oflaz, G. (2017). DNR tabanlı öğretim hakkında öğrenci görüşleri, *International Journal of Innovative Research in Education*. 4(3),112-119.

Oflaz, G., Bulut, N. & Akcakin, V. (2016). Pre-service classroom teachers' proof schemes in geometry: a case study of three pre-service teachers. *Eurasian Journal of Educational Research*, 63, 133-152, <http://dx.doi.org/10.14689/ejer.2016.63.8>

Ören, D. (2007). *An Investigation of 10th Grade Students' Proof Schemes in Geometry with Respect to Their Cognitive Styles and Gender*. (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Öztürk, M. ve Kaplan, A. (2019). Cebirsel ispat yapma sürecinin bilişsel açıdan incelenmesi: Bir karma yöntem araştırması. *Eğitim ve Bilim*, 44(197), 25-64. <https://doi.org/10.15390/EB.2018.7504>

Öztürk, M., Akkan, Y. & Kaplan, A. (2019). Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin temel matematik ispatlarını yapma sürecindeki bilişsel yapılar ve argümanları. *Cumhuriyet International Journal of Education*, 8(2), 429-452. <http://dx.doi.org/10.30703/cije.490887>

Pair, J. & Calva, G. (2020). *Understanding the roles of proof through exploration of unsolved conjectures*. Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico. Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA Doi: 10.51272/pmna.42.2020-183.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods* (3rd ed). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Reid, D.A., ve Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education*. Research, Learning and Teaching, Rotterdam: Sense Publishers.

Renz, P. (1981). Mathematical proof: What it is and what it ought to be. *The Two Year College Mathematics Journal*, 12(2), 83-103.

Riley, K.J. (2003). *An investigation of prospective secondary mathematics teachers' conceptions of proof and refutations*. (Unpublished Doctoral Dissertation) Montana State University, Bozeman, Montana.

Sarı, M., Altun, A., & Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: örnek olay çalışması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40 (2), 295–319.

Shenton, A. K. (2004). Strategies for ensuring trustworthiness in qualitative research projects. *Education for information*, 22(2), 63-75.

Sen, C., ve Güler, G. (2015). Examination of secondary school seventh graders' proof skills and proof schemes. *Universal Journal of Educational Research*, 3(9), 617-631.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher*, 91, 670-675.

Sürücü, A. & Ünal, A. (2018). Öğrenci motivasyonunu artıran ve azaltan öğretmen davranışlarının incelenmesi. *Uluslararası Toplum Araştırmaları Dergisi*, 8(14), 255-295. DOI: 10.26466/opus.404122

Şafak, C. ve Akkaya, R. (2014). Ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin olasılık konusu ile ilgili kavram yanlışlarının incelenmesi. 11. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi Adana, 269-276.

Şengül S. ve Güner, P. (2013). DNR tabanlı öğretime göre matematik öğretmen adaylarının ispat şemalarının incelenmesi. *International Journal of Social Science*, 6(2), 869-878.

Tanışlı, D.(2013). ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının pedagojik alan bilgisi bağlamında sorgulama becerileri ve öğrenci bilgileri. *Eğitim ve Bilim*, 38(169), 80-95.

Tall, D. (1998). The cognitive development of proof: is mathematical proof for all or for some? İçinde Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the World* (117-136). Reston, Virginia: NCTM.

Thomas, N. P., & Nyce, J. M. (1998). Qualitative research in LIS: Redux: A response to a [re] turn to positivistic ethnography. *The Library Quarterly*, 68(1), 108-113.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Toluk-Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education*, 25 (1), 166-175.

Uğurel, I. ve Morali, S. (2010). Bir ortaöğretim matematik dersindeki ispat yapma etkinliğine yönelik sınıf içi tartışma sürecine öğrenci söylemleri çerçevesinde yakından bakış. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 135-154.

Uygan, C., Tanışlı, D., ve Köse, N.Y. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtları değerlendirme süreçlerinin incelenmesi, *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 5(2), 137-157.

Yeşildere, S. ve Türnüklü, E. (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi, *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(1), 181-213.

Yıldız, F. ve Şengül, S. (2017). 8. Sınıf öğrencilerinin olasılık ve istatistik ile ilgili anlama ve düşünme yollarının dnr tabanlı metodolojik yaklaşımla incelenmesi. *The Journal of Academic Social Science Studies*, 57, 199-226. Doi: <http://dx.doi.org/10.9761/JASSS6944>

Yoo, S. (2008). Effects of Traditional and Problem-Based Instruction on Conceptions of Proof and Pedagogy in Undergraduates and Prospective Mathematics Teachers (Unpublished Doctoral Dissertation). The University of Texas, Austin, USA.

Weber, K. (2003). *Students' difficulties with proof*. [http://www.maa.org/t\\_and\\_l/sampler/rs\\_8.html](http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_8.html). Mathematical Association of America Research Sampler #8.

## Ek 1

### İspat Görüşlerini ve İspat Şemalarını Değerlendirme Anketi

#### Bölüm I

1.Sizin için ispat nedir? Matematikte ispat yapmaktan ne anlıyorsunuz? Açıklayınız.

2.Sizce geçerli bir ispatın sahip olması gereken özellikler neler olmalıdır?

#### Bölüm II

Aşağıda verilen problemleri çözünüz.

*Soru 1:* Kerem'in farklı türden kitaplarını sakladığı küçük bir kitaplığı vardır. Kitaplığının %35'i macera, %15'i polisiye, % 20'si aşk romanı, %30'u ise ders kitaplarından oluşmaktadır. Kerem'in kitaplarına ait oranları gösteren uygun grafiği çizin ve neden bu grafiği tercih ettiğinizi ayrıntılı bir şekilde açıklayınız.

*Soru 2:* Aynı caddede bulunan iki pastane vardır. Ocak ayında A pastanesine gelen müşteri sayısı 250, B pastanesine ise 280; Mart ayında A pastanesine gelen müşteri sayısı 200, B pastanesine gelenlerin sayısı 180; Temmuz ayında A pastanesine gelen müşteri sayısı 300, B pastanesine gelenlerin sayısı 280; Kasım ayında A pastanesine gelen müşteri sayısı 100, B pastanesine gelenlerin sayısı 140'tır. Pastanelerin aylara göre müşteri sayılarını gösteren uygun grafiği çizin ve neden bu grafiği tercih ettiğinizi ayrıntılı bir şekilde açıklayınız.

*Soru 3:* Zeynep bisikletini sürmeye başladıktan 20 dk sonra maximum hızı olan 60 km/sa hızına ulaşıyor. Ve bu hızla 10 dk boyunca yoluna devam ediyor. 5 dk boyunca da hızını yarıya indirerek bisikletini sürüyor. 10 dk sonra ise duruyor. Buna göre, Zeynep'in hız-zaman ilişkisini gösteren uygun grafiği çizin ve neden bu grafiği tercih ettiğinizi ayrıntılı bir şekilde açıklayınız.

*Soru 4:* Aşağıdaki tabloda bir sınıftaki 24 öğrencinin bir gün içinde bilgisayar oyunu oynama süreleri dakika cinsinden gösterilmiştir. Bu verileri uygun bir grafik ile gösteriniz ve neden bu grafiği tercih ettiğinizi ayrıntılı bir şekilde açıklayınız.

20	50	30	60	90	30	60	45
40	35	90	15	60	50	45	20
60	60	30	75	80	30	80	60

*Soru 5:* Aşağıda gösterilen birinci çetele tablosu Emir'in dört günde topladığı elma ve mandalina sayısını; ikinci çetele tablosu ise dört günde topladığı elma sayısını günlere göre göstermektedir. Buna göre emirin dört günde topladığı meyvelerin şemasını (sayıları da belirterek) çizin ve neden o şemayı tercih ettiğinizi detaylıca açıklayınız. (Tablosundaki her bir çizgi 10 meyveyi karşılamaktadır).



**Tablo 1**

Salı	
Çarşamba	
Perşembe	
Cuma	

**Tablo 2**

Salı	
Çarşamba	
Perşembe	
Cuma	

**Ek 2****Görüşme Formu**

1. En çok hangi problemde zorlandınız? Neden? Kısaca açıklayınız.
2. Problemlere ilişkin çözümlerinizi ispat temelli öğretime dayandırdığınızı düşünüyor musunuz? Kısaca açıklayınız.
3. Matematik derslerinde diğer konularda da ispat temelli yaklaşımı kullanmak ister misiniz?