DOI: http://doi.org/10.5281/zenodo.11582188 **Accepted:** 30.05.2024

Matematik Öğretmenlerinin Temsil Kullanımlarının Örüntü Genelleme Problemleri Bağlamında Video Temelli Olaylarla İncelenmesi

Investigation Of Mathematics Teachers' Use Of Representation With Video-Based Events In The Context Of Pattern General Problems

Sare ŞENGÜL
Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Bilimleri Fakültesi
zsengul@marmara.edu.tr, ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-1069-9084

Ezgi MANCOĞLU KAPLAN
Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Bilimleri Enstitüsü,
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü
ezgimancoglu@gmail.com, ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-6324-6476

Özet

Matematik yapma yollarından biri olan genelleme, öğrencilerin aritmetik düşünmeden cebire geçiş yapmalarına yardımcı olarak cebirsel düşünmenin gelişimini desteklemesiyle matematik eğitiminde önemli bir yer tutmaktadır. Genelleme yapma becerisinin geliştirilmesinde farklı temsillerin kullanımı birçok araştırmacı tarafından vurgulanmaktadır. Matematiksel genellemenin temel yapısını örüntüler ve örüntü genelleme problemleri oluşturmaktadır. Bu araştırmada matematik öğretmenlerinin örüntü genelleme problemleri bağlamında genelleme sürecinde temsili nasıl ve hangi amaçlarla kullandıklarının video temelli örnek olaylar aracılığı ile incelenmesi amaçlanmaktadır. Araştırmanın katılımcıları gönüllü olarak katılım gösteren dört matematik öğretmeninden oluşmaktadır. Veri toplama sürecinde katılımcılara örüntü genelleme problemleri kapsamında gerçekleştirilen beş ders parçasının videoları izletilmiştir. Veriler video temelli olaylar üzerinden gerçekleştirilen görüşme sürecinde ortaya çıkan yazılı ve sözlü kaynaklardan elde edilmiştir. Verilerin analizinde nitel analiz yöntemi kullanılmıştır. Araştırmanın bulguları, genelleme süreçlerinde kullanılan temsillerin kullanım amaçlarında farklılıklar görüldüğünü ortaya koymaktadır. Matematik öğretmenlerinin genelleme sürecinde temsiller arasında dönüşümler yaptıkları da görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Çoklu Temsiller, Temsiller, Örüntü Genelleme Problemleri, Video Temelli Örnek Olay.

Abstract

Generalization, one of the ways of doing mathematics, has an important place in mathematics education as it supports the development of algebraic thinking by helping students transition from arithmetic thinking to algebra. The use of different representations in developing generalization skills is emphasized by many researchers. The basic structure of mathematical generalization is patterns and pattern generalization problems. This research aims to examine how and for what purposes mathematics teachers use representation in the generalization process in the context of pattern generalization problems, through video-based case studies. The participants of the research consist of four mathematics teachers who participated voluntarily. During the data collection process, participants were shown videos of five lesson parts performed within the scope of pattern generalization problems. Data were obtained from written and verbal sources that emerged during the interview process conducted over video-based events. Qualitative analysis method was used to analyze the data. The findings of the research reveal that there are differences in the purposes of use of the representations used in generalization processes. It has also been observed that mathematics teachers make transformations between representations during the generalization process.

Keywords: Multiple Representations, Representation, Pattern Generalization Problems, Video-Based Case Studies.

1. GİRİŞ

Cebirsel düşünme, sayılar ve hesaplamalar ile matematiksel yapıları anlamayı, örüntülerle ilgili genellemeler yapmayı, ortaya çıkan durumları farklı şekillerde temsil ve analiz etmeyi içinde barındıran matematiksel bir düşünme şeklidir (Kaput, 1999; NCTM, 2000; Van de Walle, Karp & Bay Williams, 2011). Cebirsel düşünme, aritmetik düşünmenin üzerine inşa edilen bu nedenle de iki düşünme şekli arasındaki ilişkilerin kurulabilmesiyle geliştirilen bir düşünsel süreçtir (Williams & Cooper, 2001). Aritmetik ve cebirsel düşünmenin bir arada ele alındığı araştırmaların olmasının yanı sıra Radford (2006), bu iki düşünme şeklini birbirinden ayıran özellikleri net bir şekilde tanımlamış ve cebirsel düşünmenin ayırt edici düşünebilme ile ilgili olduğunu vurgulamıştır. Öte yandan cebirsel düşünmenin sadece cebir öğrenme alanıyla ilgili olmaması; problem çözebilme, akıl yürütebilme, modeller ile çalışabilme gibi becerileri de kapsaması (Akkan, 2016; Kaf, 2007; Kriegler, 2004) nedenleriyle matematiksel düşünebilme üzerindeki yeri göz ardı edilemeyecek kadar önemlidir. Bu durum ise matematik eğitimi araştırmacılarının cebirsel düşünmenin geliştirilebilmesi adına farklı yaklaşımlar aramalarına yol açmıştır.

Matematik yaptırma yollarından biri olan genelleme, öğrencilerin aritmetik düşünmeden cebire geçiş yapmalarına yardımcı olarak cebir öğretimine katkı sağlaması ve bu yönüyle cebirsel düşünmeyi kolaylaştırması nedeniyle matematiksel düşünmenin gelişiminde önemli yeri olan matematiksel bir beceridir (Blanton & Kaput, 2002; Lannin, 2005; Zazkis & Liljedahl, 2002). Matematiksel bir yapının oluşumunu içinde barındıran ve düşünsel bir süreç olan genelleme, matematiksel yapıları tanımayı ve bu yapılar arasında ilişkiler kurmayı kapsadığı için cebirsel düşünmeyi desteklemektedir (Yeşildere İmre, Akkoç & Baştürk Şahin, 2017; Yılmaz & Argün, 2013). Öğrencilerin sözlü ve sembolik genellemeler aracılığı ile cebirsel düşünmelerini desteklemesi nedeniyle ise genellemenin temel yapısını örüntüler ve dolayısıyla örüntü genelleme problemleri oluşturmaktadır (English & Warren, 1998). Matematik öğretim süreçlerinde kullanılan örüntü genelleme problemlerinin, öğrencilerin genelleme ve sembolleştirme becerilerini geliştirmesi ve özellikle örüntülerdeki terimler arasındaki ilişkilerden bütüne odaklanmaya geçiş aracılığıyla cebirsel düşünmeyi teşvik etmesi bağlamında genelleme yapmada etkili olduğu vurgulanmaktadır (Yakut & Akyüz, 2015). Öte yandan öğrencilerin cebirsel düşünmede anahtar konumunda olan örüntü problemlerini genelleme süreçlerinde özellikle ardışık terimler arasındaki ilişkiye odaklanmalarından dolayı uzak terimi bulmakta zorlandıkları da bilinmektedir. (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008; Lannin, 2002; Orton ve Orton, 1999; Radford, 2006; Yeşildere İmre & Gökçe, 2017).

Alanyazın incelemesinde, bu tür öğrenme güçlüklerine sahip öğrencilerle karşılaşan öğretmenlerin öğrencilerin genelleme süreçlerindeki yapılar arasındaki ilişkileri kurabilmelerini sağlatmak için doğru temsilleri kullanmaları gerektiği ve bu sayede öğrencilerin temsiller arasındaki bağlantılarla matematiksel yapıları ilişkilendirilerek etkili bir genelleme süreci gerçekleştirecekleri düşüncesinin yer aldığı görülmektedir (Brenner vd., 1997 ; Herbert & Brown, 1997; Keller & Hirsch,1998; NCTM, 2000; MEB, 2013; Rivera & Becker, 2008; Sasman, 2015).

Delice ve Sevimli (2016), temsillerin kavramsal yeterliliklerin geliştirilmesindeki ve bilginin anlamlandırılmasındaki yeri düşünüldüğünde, örüntü problemlerinin genelleme süreçlerinde çoklu temsillerden yararlanılması gerektiğini savunmaktadırlar. Tablolardan, grafiklerden, kelimelerden ya da sembollerden yararlanarak farklı temsil biçimlerini ilişkilendirebilme ve karşılaştırabilme, genelleme yapmayı kolaylaştırmakta ve bu sayede cebirsel düşünmeyi desteklemektedir (NCTM, 2000, s. 158). Öte yandan genellemenin matematik öğretimindeki yeri ve öğrencilerin genelleme sürecinde yaşadıkları zorluklar ve bu zorlukların giderilebilmesi gerekliliği düşünüldüğünde ise öğretmen bilgisi gündeme gelmektedir. Temsil kullanımının genelleme sürecindeki yerine ait alanyazındaki atıflar da göz önünde bulundurulduğunda öğrencilerin öğrenmesini kolaylaştırmak adına temsillerden yararlanmanın ve temsillerin bir durumu ifade etmekteki zayıf ve güçlü yanlarını bilmenin, öğretmenler için önemli bir öğretim bilgisi olduğu açıkça görülmektedir (Yeşildere İmre & Akkoç, 2012).

Örüntü problemlerinin genellemesi üzerine alanyazında yer alan çalışmalar incelendiğinde mevcut çalışmaların (Akkan & Çakıroğlu, 2012; Becker & Rivera, 2005; Kılınç,2019; Lannin, Barker & Townsend, 2006; Özdemir, Dikici & Kültür, 2015; Sasman, Olivier & Linchevski,1999; Rivera, 2007; Rivera & Becker, 2003; Takır & Özerem, 2020; Tolga & Cantürk Günhan,2020; Yakut Çayir & Akyüz, 2015; Yeşildere İmre & Akkoç, 2017; Zazkis & Liljedahl, 2002) katılımcılarının çoğunlukla öğrenci gruplarından oluştuğu söylenebilmektedir. Son yıllarda yapılan çalışmalarda öğretmen adayları üzerinden gerçekleştirilen incelemelerin arttığı görülse de (Akkan, Öztürk & Akkan, 2017; Girit Yıldız & Gündoğdu Alaylı, 2019; Kılıç,2019; Tanışlı, Köse & Camci, 2018; Türkoğlu & Yalın, 2020; Yeşildere & Akkoç, 2012) öğretmenler üzerine gerçekleştirilen çalışmaların hala az sayıda olduğu fark edilmektedir. Öte yandan örüntü genelleme problemleri ve temsil ilişkisi üzerine gerçekleştirilen az sayıdaki çalışmaların temsillerin türlerinin belirlenmesine yönelik olması ve matematik öğretmenleri üzerine derinlemesine bir çalışmanın gerçekleştirilmemesi alanyazında yer alan bir açıklıktır.

Araştırmada, matematik eğitimi alanında yapılan çalışmalarda video temelli örnek olayların, (i) öğretmenlerin farklı öğretim ortamlarındaki süreçleri gözlemleyerek bilgi edinmesi ve analiz etmesi için fırsatlar sağlaması (Martinez, Castro, Carlton & Dasgupta, 2015; Santagata & Angelici,2010), (ii) öğrencilerin düşünmesinin altında yatan matematiği ortaya çıkarmada öğretmen bilgisinin gelişimini olumlu yönde etkilemesi (Sherin & Van Es, 2009) ve (iii) alanyazında büyüyen bir araştırma tabanı oluşturması nedenleri de göz önünde bulundurularak; matematik öğretmenlerinin örüntü problemlerini genelleme süreçlerinde kullandıkları temsil bilgilerini incelemek adına araştırmanın amacı kapsamında bir dizi video temelli örnek olay kullanılmıştır. Eğitim alanında video temelli örnek olayların kullanımı ve potansiyel faydaları ile ilgili alanyazında yer alan bulgulara dayanılarak (Kazemi & Franke, 2003; Martinez vd., 2015; Santagata & Angelici, 2010; Sherin ve Van Es, 2009) video temelli örnek olayların kullanımının, matematik öğretmenlerinin örüntü genelleme problemleri kapsamındaki çoklu temsil bilgilerinin derinlemesine incelenmesinde önemli bulgular sağlayacağı varsayılmıştır.

Mevcut alanyazınlar göz önünde bulundurulduğunda bu araştırmanın amacı, matematik öğretmenlerinin çoklu temsil kullanım durumlarının örüntü genelle problemleri bağlamında video temelli örnek olaylar aracılığı ile incelemektir. Bu kapsam çerçevesinde araştırmada aşağıdaki sorular ele alınmıştır:

(i) Video temelli örnek olaylar kapsamında yer alan örüntü genelleme problemlerine yönelik matematik öğretmenlerinin kullandıkları farklı temsiller nelerdir?

(ii) Matematik öğretmenleri genelleme süreçlerinde bu temsilleri hangi amaçlar kapsamında kullanmaktadırlar?

Yukarıda belirtilenler kapsamında araştırmada, bir dizi video temelli örnek olaylar aracılığıyla dört matematik öğretmeninin bazı örüntü genelleme problemlerine ait temsil bilgilerini incelemek adına yürütülen çalışmanın bulguları sunulmaktadır. Örüntü genelleme problemleri ve çoklu temsiller kapsamında gerçekleştirilen bu araştırma ile matematik öğretmenlerinin öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerini geliştirmeleri adına genelleme süreçlerinde çoklu temsilleri hangi yönlerde kullandıkları ortaya çıkarılmış olacaktır.

1.1. Örüntüler ve Örüntülerin Genellemesi

Genelleme belirli nesneler arasındaki ortak özelliği bulma olarak tanımlanabilmektedir (Venenciano & Heck, 2016, s.23). Nesneler arasında gizli olan ilişkiyi görebilmek için özelden genele bir bakış açısı geliştirilmesidir (Krutetskii, 1976). Sayıların ya da nesnelerin rastgele olmaksızın belirli bir kurala bağlı olarak düzenlendiği yapılar olan örüntüler ise bu yönüyle genellemenin temelinde yer almaktadır. Bu mevcut düzeni ifade etmek için genelleme yapmak kadar süreci yapılandırmak da çoğu araştırmacı tarafından araştırmaya değer görülmüştür (Radford, 2008; Rivera, 2011). Bu şekilde örüntüleri genellerken karşılaşılan sorunlar süreç incelenirken daha kolay fark edilebilecektir (Radford, 2008). Radford' un bu duruma dayanarak genelleme sürecine yönelik gerçekleştirmiş olduğu incelemeler, genelleme sürecinde; cebirsel genelleme ve aritmetik genellemenin ortaya çıktığını göstermektedir.

Bir örüntünün cebirsel olarak genellenebilmesi, örüntünün bazı terimleri arasında olan ortak özelliğin belirlenebilmesine, belirlenen özelliğin örüntünün tüm terimleri için geçerli olduğunun farkına varılmasına ve örüntünün herhangi bir terimini bulabilmek için belirlenen aynı özelliğin kullanılabilmesine bağlıdır (Radford, 2008). Cebirsel genelleme sürecinde örüntünün bir bölümü üzerinden ortak özelliğin fark edilmesi ayırt etme, ortak özelliğin fark edilmesi ile tüm terimler için geçerli olan bir hipotez geliştirilmesine transfer etme, bu hipotez üzerinden örüntünün tüm terimlerini kapsayacak bir kural yazabilmeye ise ortak özellikten oluşturma denilmektedir (Radford, 2008). Aritmetik genellemede, bütüne ait geliştirilen düşünceden sonuca ulaşılamaz. Bu nedenle cebirsel genellemelerde bir terimi bulmak için geliştirilen her terimi temsil eden ifade, aritmetik genellemelerde geliştiremez (Radford,2008). Aritmetik genelleme sürecinde terimler arasındaki ortaklık fark edilir yani ayırt edebilir ve bu ortaklığın örüntünün tüm terimleri için geçerli olduğu düşüncesini oluşturulabilir yani transfer edilebilir ancak ortak özelliğin ifade edilebileceği bir kural geliştirilemez. Cebirsel genellemede, modeli tanımlamaktan genelliği ifadeye geçiş kolay bir süreç değildir (Chua,2009) Araştırmalar, öğrencilerin örüntüyü tanımlamakta sorun yaşamaktan daha çok genel kuralı cebirsel notasyonlarla ifade etmekte zorlandıklarını ortaya çıkarmıştır (Baş, Erbaş & Çetinkaya, 2011; Chua, 2009; Radford, 2008; Yeşildere İmre ve ark. 2017). Bu da öğrencilerin genelleme yaparken çoğunlukla aritmetik genellemeler yaptıklarını göstermektedir.

1.2. Örüntü Genelleme Problemleri

Örüntü genelleme problemleri, genelliği ortaya çıkarmak ve duruma ait ilişkileri farklı şekillerde temsil etmek için nicelikler arasındaki ilişkilerin keşfedilmesinin gerektiği bağlamlardan oluşan problemlerdir (Chua, 2009). Öğretim ortamlarında kullanılan birçok örüntü genelleme problemlerinin olmasına rağmen bu problemler sayısal örüntü genelleme problemleri ve şekil örüntü genelleme problemleri olarak iki başlık altında toplanabilir. Sayısal örüntü genelleme problemleri, probleme ait modelin bir sayı dizi olarak sınıflandırılmasını ifade etmektedir (Chua,2009). Şekil örüntü genelleme problemlerinde ise problem kapsamındaki model şekilsel olarak sunulmaktadır (Chua,2009).

Bir basketbol takımının oyuncularının forma numaraları belirli bir dizide "1, 5, 9, 13, …" şeklindedir. Buna göre n'inci oyuncunun forma numarasını için bir kural yazabilir misiniz? Cevabınızı açıklayınız.

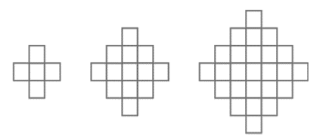
Şekil 1. Sayısal genelleme problemi örneği

Şekil 1'de yer alan problem sayısal genelleme problemlerine bir örnektir. Sayısal örüntü genelleme problemlerinde terimlerin nasıl devam ettiğini gösteren açık bir varsayımın olmaması bazen bu tür problemlerin öğrenciler için sorunlar oluşturmasına neden olabilir. Örneğin bu problemde yer alan terimleri öğrenci, 1,5,9,13,1,5,9,13 ya da 1,5,9,13,13,9,5,1 şeklinde devam ettirebilir. Bu durum sayısal örüntü genelleme problemlerinin eksik bir yönüdür. Rivera ve

Becker (2007), problemin bağlamının açıkça belirtilmediği bu tür durumlarda problemlerin başka geçerli yollarla da yorumlanabileceğini belirtmiştir. Bu nedenle sayısal örüntü genelleme problemlerinde öğrencilerin hem makul hem de kesin modellerle meşgul edilmesi gerekmektedir (Stylianide, 2010). Şekil örüntü genelleme problemlerinde sayılar modelin nasıl büyüdüğünü gösterirken şekil de modelin nicel yönünü açıklamayı sağlaması nedeniyle bu tür durumlarla sayısal problemlere göre az karşılaşılmaktadır (Chua,2009).

Örüntü genelleme problemlerinde yer alan dizi de terimler arasındaki artış sabit olabildiği gibi olmayabilir de. Chua (2009) bu durumu lineer olma ve lineer olmama olarak tanımlamıştır. Şekil1'de yer alan örüntü genelleme probleminde terimler arasındaki artış sabit ve 4' dür. Bu yönüyle bu problem lineer örüntü genelleme problemine örnektir.

Bahar, elindeki karolar ile duvar motifleri yapmak için bir şekil dizisi oluşturuyor. Bahar'ın n inci şekli oluştururken ihtiyaç duyacağı karo sayısını bulması için bir kural geliştiriniz. Cevabınızı açıklayınız.



Şekil 2. Lineer olmayan şekil örüntü genelleme problemi

Şekil 2'de yer alan örüntü genelleme probleminde ise terimler arasındaki artış sabit olmadığından bu problem lineer olmayan örüntü genelleme problemine örnektir. Öte yandan Şekil 2'deki problem aynı zamanda bir şekil örüntü genelleme problemidir.

Örüntü genelleme problemlerinin amacı öğrencilerin modeli tanımlaması, tanıması, genişletmesi ve cebirsel olarak ifade etmesidir. Öğrenciler bu süreçleri tamamlarken nicelikler arasındaki ilişkilere odaklanarak (Radford, 2008) ve sayısal değerleri temsil etmek için cebirsel ifadeleri kullanarak (Kaput, 2008) aritmetikten cebire geçiş yaparlar (Chua,2009).

1.3. Çoklu Temsiller

Alanyazın incelendiğinde temsil kavramının matematik öğretiminde, bir yapıyı ifade etmek için kullanılmaya başladığı ancak ilk tanımının Amerikan Matematik Derneğinin 1923'teki bir raporunda cebir ve geometri alanında anlama üzerine tanımlandığı görülmektedir (Delice & Sevimli, 2016). Temsil kavramı Türk Dil Kurumunda, "birinin veya bir topluluğun adına davranma" şeklinde ifade edilmekle birlikte birçok matematik araştırmacı tarafından farklı şekillerde ele alınmıştır. Adu-Gyamfi (2007) temsili bir kavram ile kavramı oluşturan yapılar arasındaki ilişkiyi ortaya koymak için kullanılan insan ürünü olan içsel ve dışsal nesleler olarak ele alırken, Palmer (1997) temsili, bir kavramı ya da belli bir kısmının yerine onu ifade etmek için sembollerle yapılandırma olarak tanımlamıştır.

Dufour-Janvier, Bednarz ve Blanger (1987) temsil kavramını gözlemlenebilir olup olmamasına göre iç ve dış temsiller olarak sınıflandırmıştır. Öte yandan Gilbert (2010) , temsilleri sözel olup olmalarına göre şekilsel ve sembolik olmak üzere iki başlık altında ele alımıştır. Şekilsel temsiller; resim, çizim, grafik vb. içerirken; sembolik temsiller; işaret, söylem gibi soyut içerikleri kapsamaktadır. Nahakara (2008), temsil sınıflandırmasına sembolik ve şekilsel temsillerin yanı sıra dilbilimsel ve manipülatif temsilleri de alanyazına kazandırmıştır.

Çoklu temsiller üzerine matematik eğitimi alanında yapılan sınıflandırmaların büyük çoğunun dış temsiller olduğu görülmektedir. Matematiksel bir yapıya ait farklı temsiller arasında ilişkiler kurulup geçişler yapılabilmesi matematiksel bir yeterliliktir. Bu yeterliliğe sahip olmak bir problem durumu için hangi temsilin uygun olduğuna karar verebilmek öte yandan üst bilişsel becerileri de olumlu etkilemektedir (Hahkiöniemi, 2006). Çoklu temsillerin öğretim sürecinde kullanım amaçları da birçok araştırmacının dikkatini çekmiş Ainsworth (2006), bu kapsamda çoklu temsillerin işlevlerini tamamlayıcılık, yorum kısıtlaması ve derin anlama olarak sınıflandırmıştır.

1.4. Video Temelli Örnek Olay

Örnek olaylar, çözülmemiş ve ilgi çekici sorunları veya durumları sunan anlatılar, seçilmiş veri örneklemeleri veya ifadelerdir (Indiana University Teaching Handbook, 2005). Shulman (1986) örnek olaylara, öğretmenlerin, uygulamalar hakkında işbirliği içinde düşünmelerine ve akıl yürütmelerine yardımcı olan bilgiler gözüyle bakmaktadır. Örnek olaylar çalışmaları, öğretmenleri kendi öğretim süreçleri dışında gerçekleşen durumları deneyimlemelerini sağlar. Bu şekilde öğretmenler örnek olaylar sayesinde farklı öğretim süreçlerini gözlemleyebilir, yorumlayabilir ve değerlendirebilir. Aynı zamanda bu uygulamalar ile öğretmenlerin öğretim süreçleri için de öz değerlendirme gerçekleştirmeleri sağlanmış olur.

Örnek olayların uygulama şekilleri çeşitlilik göstermekle birlikte video temelli olanlar bunlardan biridir. Video temelli örnek olaylar, teknolojinin örnek olayların içerisine entegrasyonu sayesinde ortaya çıkmaktadır. Video temelli örnek olay, bir problem durumunun açıklamasının ve modellenmesinin video ile hikâyelendirilmesidir. Bu tür örnek olaylar sayesinde öğretmenler sunulan olayları gerçekleştiği süreç içerisinde gözlemleme fırsatı da bulmuş olurlar. Yine video temelli örnek olayların belirli amaç kapsamında içeriği sınırlandırıldığından öğretmenlerin düşüncelerini amaca odaklanarak geliştirmelerine de kolaylık sağlamaktadır (Martinez ve ark., 2015).

2. YÖNTEM

2.1. Araştırma Modeli

Matematik öğretmenlerinin video temelli örnek olaylar ile örüntü genelleme problemleri bağlamında kullandıkları çoklu temsilleri ve temsillerin kullanım amaçlarını ortaya çıkarmayı amaçlayan bu araştırmada, araştırma problemine ayrıntılı bir bakış açısı getirilerek problemin, derinlemesine ve detaylı bir şekilde incelenmesi planlanmıştır. Bu nedenle çalışma nitel bir araştırma yöntemlerinden bir durum çalışması olarak tasarlanmıştır. Durum çalışmaları, belirli bir yapının ayrıntılı bir şekilde betimlenmesi ve incelenmesidir (Merriam, 2013).

2.2. Katılımcılar

Çalışmanın katılımcıları Türkiye'nin farklı devlet okullarında görev yapan 4 matematik öğretmeninden oluşmaktadır. Araştırmanın verileri katılımcılara izletilen videolar üzerine gerçekleşen görüşmelerden toplanacağından katılımcılar, kendini ifade edebilen, gözlemlediği durumu yorumlayabilen öğretmenler olacak şekilde gönüllü katılımcılar arasından amaçlı örnekleme tekniği ile belirlenmiştir. Dört katılımcı da kadındır ve aynı devlet üniversitesinden mezundurlar. Dört matematik öğretmeninden ikisi üç yıl, diğer ikisi ise iki yıl süre ile kurumlarında görev yapmaktadırlar. Araştırma sürecinin başında matematik öğretmenlerine araştırmanın amacı, kapsamı ve süreci hakkında bilgi verilmiştir. Çalışmada etik kurallar gereği katılımcıların gerçek isimleri kullanılmamış olup bulgular başlığı altında veriler sunulurken katılımcılara verilen takma adlar kullanılmıştır. Katılımcıların takma adlarıyla birlikte görev yılları ve eğitim düzeyleri kapsamında bilgilerinin özeti Tablo1' de yer almaktadır.

Tablo1. Katılımcı Bilgileri

Matematik Öğretmeni	Görev Yılı	Okul Düzeyi	Eğitim Düzeyleri
Beril	3	Orta Okul	Yüksek Lisans
Beste	3	Orta Okul	Lisans
Zeynep	2	Orta Okul	Yüksek Lisans

2.3. Veri Toplama Araçları

Araştırmanın veri toplama sürecinde beş video temelli örnek olaydan yararlanılmıştır. Farklı örüntü genelleme problemlerinin çözüldüğü öğretmen-öğrenci iletişiminin yer aldığı süreçleri kapsayan bu videolar, öğretmen bilgi ve öğrenci hataları üzerine araştırmacının meslek hayatında deneyimlediği genellemeye ait olaylar kapsamında araştırmacı tarafından tasarlanmıştır. Video vakalar kapsamında yer alan örüntü genelleme problemleri, terimler arasındaki artışın sabit olma ve sabit olmama (lineer-lineer olmayan) özelliklerini kapsayacak şekilde tasarlanmıştır. Video temelli örnek olaylarda kullanılacak olan örüntü genelleme problemlerinin amacı yansıtacak şekilde belirlenebilmesi adına iki matematik eğitimi araştırmacından uzman görüşü alınmış olup, başlangıçta hazırlanan sekiz örüntü genelleme problemi içerisinden uzman görüşleri doğrultunda beş problemin kullanılmasına karar verilmiştir. Bu doğrultuda araştırmacı tarafından seçilen beş problemi kapsayan videolar tasarlanmıştır. Videolar üzerinden de uzman görüşleri alınmış olup videolar üzerinde değişiklikler yapılmamıştır. Her bir videonun içeriği hakkında bulgular bölümünde bilgi verilmiştir. Video temelli örnek olaylar kapsamında yer alan problemler "Örüntü Genelleme Problemleri Formu" içerisinde Şekil 3' de verilmiştir.

1.Saksı Problemi

Bir çiçekçi kargolamak için paketlediği saksı çiçeklerinin zarar görmemesi için şekildeki gibi çiçeklerin etrafına köpük parçaları koymaktadır. 6 saksı çiçeği için 18 köpük kullanmıştır. n tane saksı çiçeğini paketlemek için kullanması gereken köpük sayısını bulmak için bir kural geliştiriniz. Kuralı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

2. Bakteri Problemi

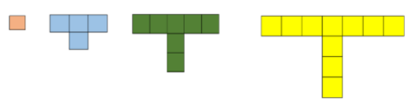
Elverişli bir büyüme ortamına konan petri kabındaki bakteriler saat başı çoğalmaktadır. Başlangıçta petri kabında 7 bakteri bulunmaktadır. İlk üç saat sonunda ise petri kabındaki bakteri sayıları sırasıyla 13, 23, 37 olmaktadır. Herhangi bir saat sonundaki bakteri sayısının belirlenebilmesi için bir kural geliştiriniz.

3.Kumbara Problemi

Kumbarasında 10 TL parası olan Aslı, her gün kumbarasına 4 TL ekliyor. n. günde kumbarasında kaç TL paranın olduğunu bulmak için bir kural geliştiriniz.

4.Oyun Kartları Problemi

Hazal bir oyun tasarlamak için renkli karelerden oluşan kartlara ihtiyaç duymaktadır. Bunun için evinde bulunan farklı renkteki kare şeklindeki kartonlar ile bir dizi kartlar oluşturmaktadır. Beste'nin renkli kartonlardan oluşturduğu oyun kartları aşağıdaki şekildedir.



Hazal'ın 36. oyun kartında kaç renkli karenin bulunduğunu belirleyiniz.

Şekil 3. Örüntü genelleme problemleri formu

2.4. Veri Toplama Süreci

Araştırmada matematik öğretmenlerinin örüntü genelleme problemleri bağlamında çoklu gösterimleri nasıl kullandıklarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Amaca yönelik olarak öğretmenlerin çoklu temsil kullanım durumlarının derinlemesine incelenmesi gerektiğinden görüşme tekniği kullanılmıştır. Araştırmada dört matematik öğretmenine beş örnek olay videosu izletilmiştir. Süreçte katılımcılara "Buradaki öğrencinin bu yöndeki düşüncesinin nedeni ne olabilir?" , "Siz dersteki öğretmenin yerinde olsaydınız bu sorunu gön özünde bulundurarak nasıl bir genelleme süreci tasarlardınız?" şeklinde yapılandırılmış ve yapılandırılmamış sorular yöneltilerek katılımcıların temsil kullanımları konusundaki bilgileri derinlemesine incelenmeye çalışılmıştır. Videoların izlendiği görüşmeler sürecinde araştırmacının rolü, matematik öğretmenlerini herhangi bir düşünceye yönlendirmekten ziyade deneyimlerini matematik öğretmenlerinin düşüncelerini paylaşmalarını teşvik etmek adına kullanmaktır. Video temelli örnek olayların izlenildiği süreçte matematik öğretmenlerine istedikleri zaman videoların durdurulabileceği, seste ya da görüntüde anlayamadıkları bir durum karşısında soru sorabilecekleri söylenmiştir. Ancak bu tür bir durum veri toplama sürecinde yaşanmamıştır. Katılımcıların izni alınarak video ve ses kayıtları alınmıştır. Elde edilen ses ve görüntüler, veri toplama süreci tamamlandığında yazılı doküman haline getirildi. Araştırmanın verilerini dönüştürülen bu belgeler ve katılımcıların kendi yazılı belgeleri oluşturmaktadır.

2.5. Verilerin Analizi

Örüntü genelleme problemlerine dayalı video temelli örnek olay durumlarının tartışıldığı süreçte matematik öğretmenlerinden elde edilen veriler nitel olarak analiz edilmiştir. Analiz sürecinde alanyazında yer alan Radford (2008)' un cebirsel örüntü genelleme çerçevesi ve Goldin ve Kaput (1996), kaynakça Nahakara (2008)' nın temsil sınıflandırmaları kullanılmıştır. Matematik öğretmenlerinden beş video vaka çalışması üzerinden elde edilen veriler analiz edildiğinde oluşturulan başlıklar ve alt başlıklara Tablo 2'de yer verilmiştir.

Tablo 2. Matematik Öğretmenlerinin Örüntü Problemleri Bağlamında Temsil Kullanım Durumlarına Ait Ortaya Çıkan Kategoriler ve Alt Kategoriler

Kategoriler	Alt Kategoriler
Çoklu Temsiller Türleri	Grafik, Nümerik, Cebirsel, Şekil, Sözel, Teknolojiye dayalı temsil
Çoklu Temsil Kullanım Amaçları	Ortak özelliği fark ettirme Genel kuralı yazabilme Artışın sabit olmadığını fark ettirme

Çoklu temsil türleri kategorisi, birinci araştırma sorusuna ait verilerin kodlandığı kategoridir. Çoklu temsil türleri kategorisi, matematik öğretmenlerinin video vaka durumlarında yer alan örüntü genelleme problemlerine ait kullandıkları temsiller verilerinden elde edilen bulgulardır. Bu kategori Golden ve Kaput (1996) ve Nahakara (2008)'nın temsil sınıflandırmaları çerçevesi üzerinden alt kategorilere ayrılmıştır. Bu kategoriye ait veriler dış temsiller kategoriden oluşmaktadır. Dış temsiller alt kategorisi de kendi içerisinde; grafik temsil, tablo temsil, cebirsel temsil, şekil temsil, sözel temsil, teknolojiye dayalı temsil olmak üzere beşe ayrılmaktadır. Bu alt kategorilere ait örnekler bulgulara, her problem durumuna ait genelleme durumlarının ayrı ayrı ele alındığı başlıkların altında yer verilmiştir. Çoklu temsil kullanım amaçları kategori, matematik öğretmenlerinin video vaka durumlarında yer alan örüntü genelleme problemlerine ait kullandıkları temsilleri ne amaçlarla kullandıklarını açıklayan, katılımcıların kendi söylemleri üzerinden elde edilen verilerinin bulgulardır. Çoklu temsillerin kullanım amaçları kategorisi; ortak özelliği fark ettirme, genel kuralı yazabilme, artışın sabit olmadığını fark ettirmedir. Mevcut kodların hangi durumlar için geçerli olduğunu gösteren tanımlamalara aşağıda yer verilmiştir:

- Ortak özelliği fark ettirme, matematik öğretmenlerinin temsil kullanım durumlarında cebirsel genellemenin başlangıcı olan örüntü terimleri arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarma amacı ile temsil kullanmalarını ifade etmektedir.
- Genel kuralı yazabilme, matematik öğretmenlerinin cebirsel genellemenin tamamlanabilmesi için belirlenen genel kuralı cebirsel olarak yazılabilmesi adına temsillerden yararlanmalarını ifade etmektedir.
- Artışın sabit olmadığını fark ettirme, matematik öğretmenlerinin lineer olmayan örüntü genelleme problemlerinde terimler arası artışın sabit olmadığını fark ettirme amacıyla temsil kullanımını belirtmektedir.

2.6. Geçerlik ve Güvenirlik

Araştırmanın geçerlik ve güvenirlik kriterleri geçerlilik boyutunda iç geçerlilik "inandırıcılık" (Mertens,1998) ve dış geçerlik "aktarılabilirlik" (Mertens,1998) terimleri ile güvenirliği ise "güvenirlik" (Mertens,1998) terimi ile sağlanmaya çalışılmıştır. Araştırmanın inandırıcılık kriterini sağlatabilmek adına derinlemesine veri topla süreci gerçekleştirilmeye çalışılmıştır. Bu amaç kapsamında veri toplama süreci üç oturumda gerçekleştirilmiştir. Aynı zamanda veri toplama araçlarının geliştirilmesinde uzman görüşleri alınmıştır. Nitel bir çalışma olan bu araştırmada genelleme kaygısı olmadığından bunun yerine aktarılabilirlik kriteri ile dış geçerlik sağlanmaya çalışılmıştır. Bu kritere yönelik olarak katılımcılar amaçlı örnekleme yöntemi ile belirlenmiş olup bulgular başlığı altında kodlamalar derinlemesine açıklanmıştır. Araştırmanın verilerinin güvenirliğine yönelik analiz sürecinde veriler 2 kez baştan tek tek okunmuş ve her problem durumuna ait veriler ayrı ayrı analiz edilerek kodlar oluşturulmuştur. Oluşturulan kodların güvenirliliğini arttırmak için ilk oluşturulan kodlama sonrasında veriler tekrar kodlanmıştır. Veri analizi süreci araştırmanın problem durumu ve amacı göz önünde bulundurularak gerçekleştirilmiştir.

2.7. Etik Kurul İzin

Yapılan bu çalışmada "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması belirtilen tüm kurallara uyulmuştur. Bu çalışma için etik kurul izni Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Esnsitüsü Araştırma ve Yayın Etik Kurulu'ndan alınmıştır.

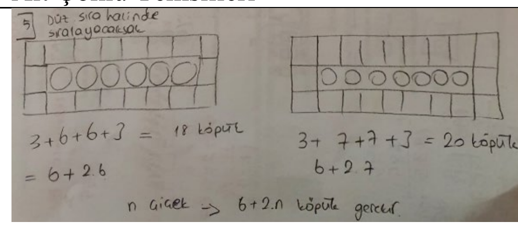
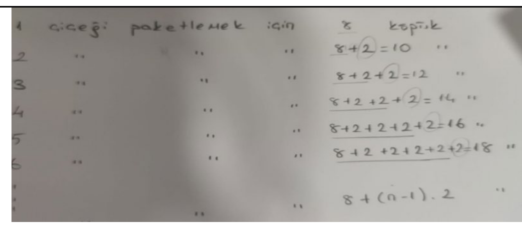
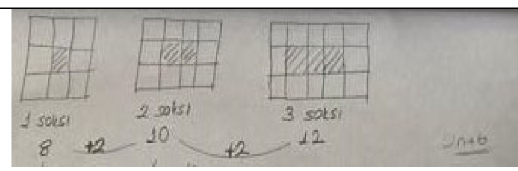
3. BULGULAR

3.1. Saksı Problemi Kapsamındaki Video Temelli Örnek Olaydan Elde Edilen Bulgular

Saksı problemine ait video temelli örnek olayında yer alan öğretmen, ilk olarak problemi öğrencilere okuyarak sunmaktadır. Daha sonrasında öğrencilerine "Soruda bize kaç saksı ve bu saksılara karşılık kaç köpük verilmiştir?" sorusunu yöneltmiş ve öğrencilerden problemin çözümü için öneriler istemiştir. Öğretmenin bu sorusu üzerine bir öğrenci "6 saksı için 18 köpük kullanılmış. 18, 6 nın 3 katı olduğundan saksı sayısının 3 katı kadar köpüğe ihtiyacımız var. Bu nedenle de n tane saksıyı paketleyebilmek için de 3n tane köpüğe ihtiyaç vardır" cevabını vermiştir.

Saksı problemi kapsamındaki video temelli örnek olay üzerinden matematik öğretmenlerinin çoklu temsil kullanımlarına ait elde edilen bulguların özetlenmiş hali Tablo 3'de yer almaktadır.

Tablo 3. Matematik Öğretmenlerinin Saksı Problemi Kapsamında Temsil Kullanımları

Öğretmen	Kullanılan Temsil	Kullanım Amacı	Katılımcıların Probleme Ait Çoklu Temsilleri
Beril	Şekil Cebirsel	Genel kuralı yazabilme Ortak özelliği fark ettirme	
Beste	Cebirsel Nümerik	Ortak özelliği fark ettirme Genel kuralı yazabilme	
Zeynep	Şekil Sözel	Genel kuralı yazabilme	

Saksı problemine ait genelleme sürecinde matematik öğretmenlerinin şekil, sözel, nümerik ve cebirsel temsillerinden yararlandıkları görülmektedir. Bu probleme ait genelleme sürecinde şekil temsilleri kullanım amaçları cebirsel genelleme sürecini başlatabilmek için cebirsel genellemenin ayırt etme basamağı adına öğrencilerin "ortak özelliği fark etme" adımını sağlatabilmektir. Beril problemde verilen 6 saksılı şekle ek olarak öğrencilerine 7 saksılı durumu çizerek 3 katı köpüğün kullanılmadığını göstereceğini ifade etmiştir. Bu durum üzerine katılımcıya araştırmacı tarafından "Bir özel durum ile öğrencinin genellemesini çürütmüş oluyorsun. Peki, bu durum öğrencinin genel kuralı yazabilmesi için yeterli midir? sorusu yöneltilmiştir. Bunun üzerine Beril'den "Şekil üzerinden genel terime ulaşabilmesi için cebirsel terimlerle işlemler göstermem yeterli olur" yanıtının gelmesi katılımcının genel kuralı yazabilmek için şekil temsilin tek başına yeterli olmadığı kanısında olduğunu göstermektedir. Öte yandan Zeynep'in de ilk olarak şekil temsilden yararlandığı görülse de genel kuralın ifade edilebilmesi sürecinde diğer katılımcılardan farklılaştığı, genel kuralı bulma yaklaşımının süreci yapılandırmak yerine ardışık terimler arasındaki farkı değişkenin katsayısı olarak seçmeye dayalı olduğu fark edildi. Bu ise Zeynep'in genel kuralı yazabilmek için sözel temsillerden faydalandığını ortaya çıkartmaktadır.

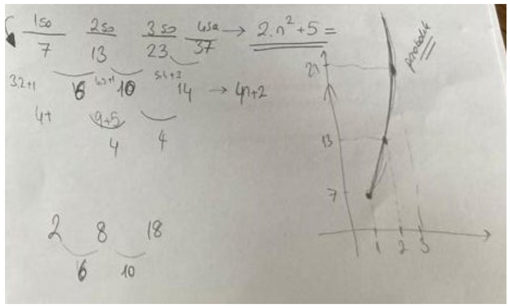
3.2. Bakteri Problemi Kapsamındaki Video Temelli Örnek Olaydan Elde Edilen Bulgular

Video örnek olayında yer alan öğretmen, ilk olarak bakteri çoğalması üzerinden gerçekleştirilen örüntü genelleme problemini öğrencilerine okumuştur. Daha sonrasında öğrencilerine "Bakteri sayılarının saate göre değişimi nasıl olmuştur?" sorusunu yöneltmiştir. Öğrencilerden birinden "İlk seferde 6 artmış. Sonrasında 10, sonra 14 artıyor" cevabını almıştır. Öğrenciden gelen bu cevap sonrasında öğretmen öğrencilerine " Burada gördüğünüz gibi artış sabit olmamıştır" demiştir. Problemde yer alan terimler arasındaki artışın sabit olmamasından dolayı çözüm sürecini kendi başlatan öğretmen, öğrencilere " bu problem için kuvveti düşünmelisiniz, o da $2n^2$ +5 olur. Kontrol edebilirsiniz" diyerek direkt kuralı vermiş ve bu durumun nasıl elde edileceğini açıklamamıştır. Bunun üzerine öğrencilerden biri "Öğretmenim, burada neden terimler arasındaki artışa odaklanmadık? Ben kuralı nasıl bulduğunuzu anlayamadım." demiştir. Bakteri problemi kapsamındaki video temelli örnek olay üzerinden matematik öğretmenlerinin çoklu temsil kullanımlarına ait elde edilen bulguların özetlenmiş hali Tablo 4'de yer almaktadır.

Tablo 4. Matematik Öğretmenlerinin İkinci Genelleme Problemi Kapsamında Genelleme Sürecinde Temsil Kullanımları

Öğretmen	Kullanılan Temsil	Kullanım Amacı
Beril	Cebirsel	Artışın sabit olmadığını fark ettirme Genel kuralı yazabilme
Beste	Grafik Cebirsel Nümerik	Artışın sabit olmadığını fark ettirme Genel kuralı yazabilme
Zeynep	Grafik Cebirsel Nümerik	Artışın sabit olmadığını fark ettirme Genel kuralı yazabilme

Bu video kapsamında gerçekleştirilen görüşmelerde Beste'nin "*Çok hızlı bir cebirsel geçiş olmuş. Yani kuvvet almaya geçiş çok hızlı. Çünkü alışmışız. İlk terimlere bak artışı hisset kontrol et kuralı bul yapıyoruz. Ama burada kareyi hisset küpü hisset zor oluyor."* ve Beril'in *"Sabit artışlarda kuralı bulmak kolay* ama *bu tarz genelleme gerektiren sorularda aradaki artışı görmek zor olduğu için mi zorlanıyorlar?"* ifadeleri problemlerin yapısal farklılıklarının genelleme süreçlerindeki stratejilerini belirlemelerinde etkili olduğunu göstermektedir. Zeynep ve Beste terimler arasındaki artışa odaklanmak için grafik temsillerden yararlanmışlardır. Zeynep bu problem durumu için *"Grafik çizebiliriz diye düşünüyorum… Yani şöyle öğrenciler doğru grafiğini zaten biliyorlar. Artış orda sabit. Bu tür artışın sabit olmadığı örüntülerin terimlerine ait grafiği çizilirse doğru oluşmadığını görür"* ifadelerini kullanırken Beril'in *" Üç dört noktayı kontrol etseler artışın sabit olmadığını görürler zaten. Bu zor değil ki."* söylemi artışın sabit olmadığını hissettirmek amaçlı grafik ve cebir temsilinden faydalandığını ortaya çıkarmaktadır. Beste'nin "*Ve daha sonra bu* *şekilde grafiğe ek tablo yaparsak genel kuralı buluruz" ifadesi* nümerik temsilin cebirsel genellemede genel kuralı yazabilmek için kullanıldığını gösteren bir veri örneğidir.



Şekil3. Zeynep'in Problem2'e ait çoklu temsil kullanım durumu

3.3. Kumbara Problemi Kapsamındaki Video Temelli Örnek Olaydan Elde Edilen Bulgular

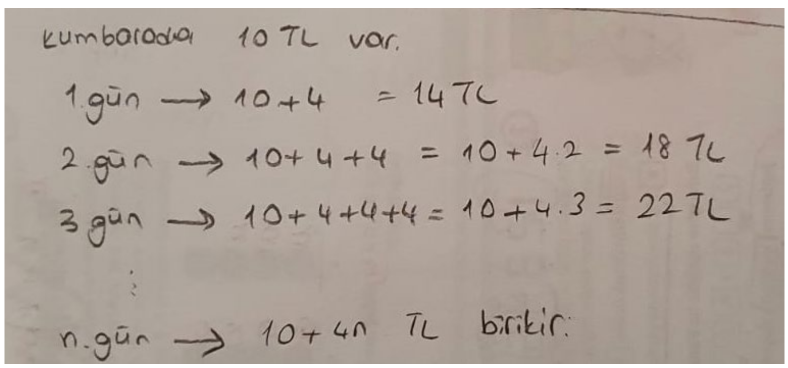
Video temelli örnek olayda yer alan öğretmen, ilk olarak problemi öğrencilere okutmuş daha sonra kumbarada biriken paranın günlük değişimini öğrencilere fark ettirmek için öğrencilerine " Aslı'nın kumbarasında her gün ne kadar parası birikiyor, bunu kontrol eder misiniz?" demiştir. Öğrencilerinden biri " başlangıçta 10 TL si vardı. Her gün 4 TL eklediğinden parası 10 TL, 14 TL, 18 TL, 22 TL şeklinde birikir." cevabını vermiştir. Bunun üzerine öğrencilerine " Peki herhangi bir gün kumbarada biriken parayı bulmak için bu şekilde yazmaya devam mı edeceğiz?" sorusunu yöneltmiştir. Öğrencilerin düşünme sürecinden sonra başka bir öğrenci problemi de çözmek isteyerek şunları belirtmiştir. " Hayır yazmamıza gerek yok. Sayılar arasındaki kuralı bulmalıyız. Ben şöyle yaptım. Şimdi bir n aldım. n nin katsayısını belirlemeliyiz. Eğer kat sayı 1 ise birinci terim için n ye 6 eklemeliyiz, buradan kural n+6 oldu. Ama ikinci terimi kontrol ettiğimizde 2+6 14 e eşit olmayacağından demek ki katsayı 1 değil dedim. 2 yi denedim sonra. Birinci terimi elde etmek için o halde 2+8 olmalı. Buradan kural 2n+8 oldu ama yine bu kuralla n yerine 2 yazınca 14 elde edemedim. Sonra katsayıyı 3 aldım. 10 için kural 3n+7 olsun dedim. Yine 3.2+7 14 e eşit olmadı. Sonra 4 ü denedim. Bu sefer oldu sonunda. 10 için 4n+6 lazım. 14 içinde 4.2+6 sağladı. Demek ki kural 4n+6 olmalıymış." 1259

Kumbara problemi kapsamındaki video temelli örnek olay üzerinden matematik öğretmenlerinin çoklu temsil kullanımlarına ait elde edilen bulguların özetlenmiş hali Tablo5'te yer almaktadır.

Tablo 5. Matematik Öğretmenlerinin Üçüncü Genelleme Problemi Kapsamında Genelleme Sürecinde Temsil Kullanımları

Öğretmen	Kullanılan Temsil	Kullanım Amacı
Beril	Nümerik Cebirsel	Genel kuralı yazabilme
Beste	Grafik Sözel	Ortak özelliği fark ettirme Genel kuralı yazabilme
Zeynep	Nümerik Grafik	Ortak özelliği fark ettirme

Kumbara problemi kapsamındaki örnek olaya ait genelleme sürecine dair elde edilen bulgularda üç katılımcının nümerik, sözel, cebirsel ve şekil temsillerin kullandıkları ve temsillerden "ortak özelliği fark ettirme" ve "genel kuralı yazabilme" amaçları ile yararlandıkları görülmektedir. Video temelli örnek olayda öğretmen kumbarada biriken paranın artışını öğrencilerine fark ettirmeye çalışmasına rağmen bir öğrencinin artış miktarını bulmuş olsa bile bunu anlamlandırmadığı genel kural bulmak için n nin katsayısının hangi değer olması gerektiğine göre sırasıyla 4 e kadar olan sayıları denediği görülmüştür. Bu durum üzerine odaklanan matematik öğretmenlerinden Beste'nin "*Bu tür yaklaşımlar öğrencinin genelleme yapmasını engelliyor. O yüzden bu yaklaşımlardan uzaklaştırmalıyız. Bunun için belki hiç para atmadan önceki kumbaradaki para miktarını fark etmesini sağlayabiliriz*." ifadelerinin yanı sıra Zeynep'den gelen "*Grafik çizerek artışı hissetmesini sağlarım. Doğrusal grafik* şeklinde çizebiliriz.*"* önerisi temsilin ilk olarak ortak özelliği fark ettirmek amaçlı kullanıldığını göstermektedir. Beril ise öncelikli olarak öğrencilerinden kumbaradaki başlangıçtaki paraya odaklanmalarını isteyip her gün için biriken parayı cebirsel olarak ifade etmelerini sağlatacağını belirtmiştir.



Şekil 4. Beril'in Problem3'e ait çoklu temsil kullanım durumu

3.4. Oyun Kartları Problemi Kapsamındaki Video Temelli Örnek Olaydan Elde Edilen Bulgular

Videoda yer alan öğretmen problemi öğrencilerine okuyarak onlardan problem için çözüm geliştirmelerini istemiştir. Bir süre beklenildikten sonra bir öğrenci problemi çözmek istediğini belirtmiş ve şu çözümü gerçekleştirmiştir. "Öncelikli olarak verilen kartlardaki kare sayılarına baktım. Birinci kartta 1 kare, ikinci kartta 4 kare, üçüncü kartta 7 kare ve dördüncü kartta 10 kare var. Kartlardaki kare sayıları 3 er 3 er artıyor. Bundan sonrası çok kolay. Çünkü artışı bulduk. Sırayla 3 ekleyerek gidersek 36. oyun kartındaki kare sayısını da bulmuş oluruz." Öğrencinin bu çözüm önerisi üzerine öğretmen öğrenciye " O halde 36. terimde kaç renkli karenin bulunduğunu söyler misin?" sorusunu yöneltmiştir.

Oyun kartları problemi kapsamındaki video temelli örnek olay üzerinden matematik öğretmenlerinin çoklu temsil kullanımlarına ait elde edilen bulguların özetlenmiş hali Tablo 6'da yer almaktadır.

Tablo 6. Matematik Öğretmenlerinin Dördüncü Genelleme Problemi Kapsamında Genelleme Sürecinde Temsil Kullanımları

Öğretmen	Kullanılan Temsil	Kullanım Amacı
Beril	Nümerik Cebirsel	Ortak özelliği fark ettirme Genel kuralı yazabilme
Beste	Teknolojiye dayalı Sözel	Genel kuralı yazabilme Ortak özelliği fark ettirme,
Zeynep	Cebirsel Sözel	Ortak özelliği fark ettirme Genel kuralı yazabilme

Oyun kartları probleminin genellemesi sürecinde katılımcılar nümerik, cebirsel, sözel ve teknolojiye dayalı temsilleri kullanma eğiliminde olmuşlardır. Burada nümerik temsil genel kuralı yazabilme amaçlı kullanılırken teknolojiye dayalı temsil ise artış miktarını hissettirme amaçlı kullanılmıştır. Cebirsel ve sözel temsillerden ise genel kuralı yazabilme amacında yararlanıldığı görülmektedir. Beril genelleme sürecinde her bir şekildeki kare sayısı üzerinden tablo çizerken, Zeynep bu durumun gereksiz olduğunu ifade ederek verilen şekil üzerinden cebirsel ifadeler ile ortak özelliğin fark ettirilmesinin yeterli olduğunu ifade etmiştir. Bu durum genelleme probleminin türünün (şekil içeren bir genelleme problemi) temsil kullanım amacının etkilediğini göstermektedir. Beste'nin "Öğrenciler bu tür şekilli problemlerde şeklin yanına ekleme yaparak istenilen adımı çizmeye çalışıyor. Bu çok uzun maalesef. Onlara matematiksel bir program ile bunun ne kadar uzun olduğunu gösterip bir iz oluşturarak 36. adımdaki şekli oluşturabilirim. Hem bu daha ilgi çekici olur" açıklaması diğer katılımcılardan farklı olarak ilk kez teknoloji temelli bir temsilden faydalandığını ortaya koymaktadır.

4. TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Matematik öğretmenlerinin kendilerine verilen örüntü genelleme problemleri kapsamındaki durumlara yönelik genelleme yapma süreçlerinde hangi temsilleri ve bu temsilleri hangi amaçlar ile nasıl kullandıklarına odaklanılan bu çalışmada bulgular iki araştırma sorusu ilişkilendirilerek tartışılmıştır. Matematik öğretmenleri kendilerine izletilen beş video temelli örnek olayda yer alan öğrencilerin hatalarını, öğretmenlerin problemleri çözüm stratejilerini fark etmişler ve genelleme sürecindeki temsil kullanımlarını bu durumları göz önünde bulundurarak yapılandırmışlardır. Örüntü genelleme problemleri kapsamında gerçekleştirilen genellemelerde Radford (2008)'un cebirsel genellemesinde ifade ettiği ayırt etmeden, genel kuralı sembolik olarak ifade etmeye kadar geçen süreçlerde matematik öğretmenlerinin şekil, nümerik, cebirsel, grafik, teknolojiye dayalı ve sözel temsilleri kullandıkları görülmektedir.

English ve Warren (1998) çalışmalarında öğrencilerin genellikle problemlerde yer alan örüntüyü tanımakta zorlanmadığını ancak cebirsel sembolleri kullanarak genel terimi ifade etmekte zorlandıklarını belirtmiştir. Bu çalışma kapsamında yer alan matematik öğretmenleri, öğrencilerin belirtilen durumlarına karşılık, temsil kullanımını genelleme sürecinin tamamına yaydıkları görülmektedir. Aynı zamanda matematik öğretmenlerinin öğrencilerin lineer olmayan örüntülerde özellikle terim sırası ile değeri arasındaki ilişkiyi fark etme de zorlanacaklarını düşünmelerine yönelik temsiller kullandıkları görülmesi English ve Warren (1995)'in sonuçları ile ilişkilendirilebilir.

Matematik öğretmenlerin kullandıkları temsiller incelendiğinde problemlerinin lineer olup olmama durumlarına göre değişiklik göstermeyip tüm matematik öğretmenlerinin genelleme süreçlerinde farklı temsiller içerisinden tablo temsillerden yararlandıkları görülmektedir. Yeşildere İmre ve arkadaşlarının da (2017) çalışmalarında genelleme süreçlerinde aynı temsil türünden sıklıkla yararlanıldığının görülmesi çalışmanın bu yöndeki sonucunun Yeşildere İmre ve arkadaşlarının çalışmaları ile paralellik gösterdiği söylenebilir. İpek ve Okumuş (2012)' un çalışmalarında alan matematik öğretmenlerinin kullandıkları çoklu temsillerinin sözel temsiller ile desteklenmesi gerektiğini vurgulamaktadırlar. Sözel temsilleri kullanım amaçlarının ise problemlere göre değişiklik gösterebildiği bazen mevcut temsiller arasında geçiş yaparken öğrenci anlamasını desteklemek amaçlı bazen ise cebirsel genelleme sürecine yönelik adımları fark ettirme amaçlı kullanıldığı görülmektedir. Ball, Thames, ve Phelp (2008)'e göre öğretmenlerin alan bilgileri onların öğretim sürecinde kullandıkları bilgileri şekillendirmektedir. Araştırmanın katılımcıları arasında yer alan bir matematik öğretmeninin öğretim sürecinde cebirsel genellemede genel kuralın oluşturulmasında standartlaştırdığı bir kuralı uygulaması nedeniyle farklı temsillerden yararlanma becerisinin beklenen düzeyde olmadığı video temelli örnek olay çalışmaları ile görülmüştür. Bu durum öğretmenlerin alan bilgilerindeki eksikliklerin temsil kullanımlarını da etkilediğini ortaya çıkararak Ball ve arkadaşlarının (2008) çalışmalarını desteklemektedir. Elde edilen bulgulardan matematik öğretmenlerinin video temelli örnek olaylarda fark ettikleri öğretim ortamına ait yanılgıları merkeze alarak geliştirdikleri genelleme süreçlerindeki temsillerin kullanım amaçları probleme göre değişiklik gösterdiği gibi aynı temsilin kullanım amaçlarına göre de değişiklik gösterdiği görülmüştür. Ball (1988) öğretmenlerin farklı temsillere ait bilgilerinin geniş olmasının öğretim amaçlarının yerine getirilebilmesi için yeterli olmadığını belirtmiş ve temsillerin aynı zamanda hangi amaçlarla kullanılması gerektiğinin de bilinmesi gerektiğini vurgulamıştır. Bu çalışmanın araştırma sorularından ikincisi bu yönüyle alanyazını destekler niteliktedir.

Çoklu temsillerin kullanım amaçları kategorisi; ortak özelliği fark ettirme, genel kuralı yazabilme ve artışın sabit olmadığını fark ettirmeden oluşmaktadır. Bu alt kategorilerden ortak özelliği fart ettirme, matematik öğretmenlerinin temsil kullanım amaçları arasında sıklıkla kullandıkları görülmektedir. Bu durumun Radford (2008)'un cebirsel genelleme çerçevesinin başlangıç adımı olmasından kaynaklı olduğu söylenebilir. Aynı zamanda çoklu temsillerin kullanım amaçları altındaki başlıklar ele alındığında araştırmaların bulguları arasında yer alan başlıkların Ainsworth (2006)'un çoklu temsillerin işlevleri sınıflandırması ile tutarlılık gösterdiği görülmektedir. Katılımcıların temsilleri sadece cebirsel genellemenin aşamaları için kullanmadıkları aynı zamanda belli bir amaç için kullanılan temsilin genellemede yeterli olmaması nedeniyle değiştirilmesi gerektiğinde de temsillerin değiştirildiği sonucu temsillerin zayıf ve güçlü yönlerini bilmenin gerekliliğini göz önüne sermektedir. Yeşildere İmre ve Akkoç (2012) ve Kendal (2002)'ın araştırmalarında yapmış oldukları bu yöndeki vurgu bu sonucu destekler niteliktedir. Katılımcıların temsilleri dönüştürme durumları incelendiğinde; şekil temsili, cebirsel genellemenin transfer sürecinde genel kuralı yazabilmek ve grafik temsilinin genelleme sürecinde kullanımının eksik kaldığı durumları düzenlemek adına tablo temsile dönüştürmeleri yine şekil temsillerin genelleme sürecinde kullanımının eksik kaldığı durumlarda teknolojiye dayalı temsillere dönüştürülmüş olmaları Ainsworth (2006)'un temsillerin tamamlayıcılık işlevi ile benzerlik göstermektedir.

Bulguların gösterdiği diğer bir husus ise matematik öğretmenlerinin, örüntünün terimleri arasındaki artışı göz önünde bulundurarak artışın sabit olup olmamasına bağlı olarak hangi temsili kullanmaları gerektiğine karar verdikleridir. Matematik öğretmenlerinin cebirsel genelleme sürecinde öğrencilerin genel kurala ulaşmada terim sırası ile terim değeri arasındaki ilişkiyi görmekte zorlanmalarına odaklanarak bu durumu kolaylaştıracak şekilde temsiler arasında dönüşümler gerçekleştirdikleri görülmüştür. Ferrari (2017) ve Yeşildere İmre ve meslektaşları da (2017) genelleme üzerine gerçekleştirdikleri araştırmalarının sonucunda benzer olarak örüntülerin temsillerle nasıl ilişkilendirildiğine ek olarak terimin temsillerdeki yeri ile arasındaki ilişkinin nasıl olduğunun belirlenmesi gerektirdiğini bu şekilde cebirsel düşüncenin gelişiminin sağlanabileceği vurgulamışlardır.

Araştırmanın bulguları üç matematik öğretmeninden elde edilenler ile sınırlıdır. Bu konu doğrultusunda daha kapsamlı, farklı bağlamlar içerisinde farklı katılımcılar ile ileri araştırmalar yapılabilir. Bu sayede matematik öğretmenlerinin farklı bağlamlardaki örüntü genelleme problemlerindeki temsil bilgilerine ait çeşitli bulgular elde edilebilir. Temsil kullanımın genelleme yaparken cebirsel düşünme üzerindeki olumlu etkisi ve araştırmanın katılımcılarının odak görüşmeler ile temsil kullanımına yönelik farklılaşan bulguları da göz önünde bulundurulduğunda çoklu temsiller alana özgü hizmet içi eğitim programlarının kapsamına dahil edilebilir. Öte yandan bu çalışmada katılımcılardan veriler video temelli örnek olaylar üzerinden elde edilmiştir. Çoklu temsil yapılarının matematik eğitimindeki yeri göz önünde bulundurulduğunda yapıya ait araştırmalarının gerçekleştirilebileceği farklı veri toplama yöntemleri de araştırılabilir.

KAYNAKÇA

Adu-Gyamfi, K.(2007). *Connections among repsentations: The of students' coordinations on a linear function task.* Unpublished PhD Dissertaion, North Carolina State University.

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual frame-work for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16, 183-198.

Akkan, Y. (2016). Cebirsel Düşünme. Bingölbali, E. Arslan, S. & Zembat, İ. (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* (s. 43-64). Ankara: Pegem.

Akkan, Y. Çakıroğlu, Ü. (2012). Doğrusal ve İkinci dereceden örüntüleri genelleştirme stratejileri: 6-8. sınıf öğrencilerinin karşılaştırılması. *Eğitim ve Bilim,* 37 (165), 104-120.

Akkan, Y, Öztürk, M, Akkan, P. (2017). Pre-Service Elementary Mathematics Teachers' Generalization Processes of Patterns: Strategies and Justifications. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)* , 8 (3) , 513-550. DOI: 10.16949/turkbilmat.323384

Ainsworth, S. (2006). Deft: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16(3), 183–198.*

Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education.* Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University, East Lansing.

Ball, D. B, Thames M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education,* 59, 389-407.

Becker, J. R. & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. L. Chick ve J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 121–128). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Blanton, M. & Kaput, J. (2002). *Developing elementary teachers' algebra "eyes and ears": Understanding characteristics of professional development that promote generative and self-sustaining change in teacher practice.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Bowling, A. (2002). Research methods in health: ınvestigating health and health services. Philadelphia, PA: McGraw-Hill House.

Brenner, M. E. Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Dura´n, R., … Reed, B. S. (1997). Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal*, 34(4), 663–689.

Carraher, D.W. Martinez, M.V. & Schliemann, A.D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*. 40: 3-22

Chua, B. L. (2009). Features of generalising tasks: help or hurdle to expressing generality. *Australian Mathematics Teacher*, 65 (2), 18-24

Delice, A., & Sevimli, E. (2016). Matematik eğitiminde çoklu temsiller. Bingölbali, E., Arslan, S., & Zembat, İ. (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* (s. 519-539). Ankara: Pegem.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concern-ing the problem of representation. In Claude Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp.109- 1221. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

English, L., & Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher*, 91(2), 166–170.

Ferrari, G. (2017). Agency and assemblage in pattern generalisation: A materialist approach to learning. *Educ Stud Math*, *94*(1), 21-36.

Gilbert, J. K. (2010). The role of visual representations in the learning and teaching of science: An introduction. *Asia Pacific Forum on Science Learning and Teaching,* 11(1), 1-19.

Girit Yıldız D., & Gündoğdu Alaylı, F. (2019). Ortaokul matematik öğretmen adaylarının sabit değişen şekil örüntüsü genellemesini öğretmek için matematik bilgileri. *Trakya Eğitim Dergisi*, 9(3), 396-414.

Goldin, G.A.,& Kaput, J.J.(1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L.P. Steffe, P. NEsher, P. Cobb, G.A. Goldin ve B. Greer (Eds.), Theories of mathematical learning (pp. 397- 430). Mahwah, NJ:Lawrence Erlbaum Associates.

Gökce, R., & Yeşildere İmre, S . (2017). The role of tasks that supports making algebraic generalisation ın forming 7th grade students' ability to generalise. *Gaziantep University Journal of Social Sciences*, 194-215. DOI: 10.21547/jss.281675

Goldin, G. A., & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. *Theories of mathematical learning*, 397-430.

Grossman, P.L. (1990). The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education. *Journal of Teacher Education*, 42(5), 379-382

Hahkioniemi, M. (2006). The role of representations in learning the derivative. Unpublished PhD Thesis, The University of Jyvaskyla.

Herbert, K. & Brown, R. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching children mathematics*, 3, 340-344.

İpek, A, & Okumuş, S. (2012). The representations of pre-service elementary mathematics teachers used in solving mathematical problems. *Gaziantep university journal of social sciences*, 11 (3) , 681-700.

Kaf, Y. (2007). Matematikte model kullanmanın 6. sınıf öğrencilerinin cebir erişimlerine etkisi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Kapur, J. N. (1976). Proposal for a course on the nature of mathematical thinking. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology*, *7*(3), 287-296.

Kaput, J.J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding (pp. 133-135). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? (eds: J. J. Kaput, D. W.Carraher and M. L. Blanton), *Algebra in the early grades*, New York: Lawrence Erlbaum Associates, 5-17.

Kazemi, E, & Franke, Megan. (2003). Using student work to support professional development in elementary mathematics. *A CTP Working Paper*. Center for the Study of Teaching and Policy, University of Washington.

Keller, B. A., & Hirsch, C. R. (1998). Student preferences for representations of functions. *International Journal in Mathematics Education Science Technology*, 29(1), 1-17.

Kendal, M. (2002). Teaching and learning introductory differential calculus. Unpublished PhD Dissertation, The University of Melbourne, Australia.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study (pp. 21-34). Dordrecht, The Nether-lands: Kluwer.

Kitzinger, J. (1994). “The methodology of focus groups: The importance of interaction between research participants”, *Sociology of health and ıllness*, 16 (1), 103–121.

Kılınç, Ç. (2019). Örüntü arama stratejisi ile çözülebilecek problemleri kurmada ortaokul öğrencilerinin performanslarının incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 27 (2) , 647-656. DOI: 10.24106/kefdergi.2622

Kılıç, S. (2019). Matematik öğretmen adaylarının, 6. sınıf öğrencilerinin cebirsel örüntüleri genellemelerine ilişkin farkındalıkları. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 27 (4) , 1713-1728. DOI: 10.24106/kefdergi.3263

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: The University of Chicago Press.

Lannin, J. (2002). *Developing middle school students' understanding of recursive and explicit reasoning.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, Louisiana.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231–258.

Lannin, J. Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3–28.

Martinez, M. V., Castro Superfine, A., Carlton, T. & Dasgupta, C. (2015). Examining the Impact of a Videocase-Based Mathematics Methods Course on Secondary Pre-service Teachers' Skills at Analysing Students' Strategies. *REDIMAT*, *Vol4*(1), 52-79.

Merriam, S.B. (2013). Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber. (S.Turan, Çev.) Ankara: Nobel.

Mertens, D. (1998). Research methods in education and psychology. London: Sage Publications

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013). Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı: 9- 12. Sınıflar. Ankara

Nakahara, T.(2008). Cultivating mathematical thinking through representation-utilizing the representational system. APEC-TSUKUBA International Congress, Japan.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Orton, A. & Orton, J. (1999). Pattern and the Approach to Algebra. (ed: A. Orton), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics,* Cassell, London, 104-120.

Özdemir, E, Dikici, R, Kültür, M. (2015). Öğrencilerin örüntüleri genelleme süreçleri: 7. sınıf örneği. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23 (2) , 523-548.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A Semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patters in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, 40, 83-96.

Rivera, F. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: understanding figural generalization. *Mathematics Teacher,* 101(1), 69-75.

Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum.* New York: Springer.

Rivera, F. & Becker, J.R. (2003). The effects of figural and numerical cues on the induction processes of preservice elementary teachers. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.),

Proceedings of the Meeting PME and PMENA (Vol. 4, 63-70). Honolulu, HA: University of Hawaii.

Santagata, R, & Angelici, G. (2010). Studying the impact of the lesson analysis framework on pre-service teachers' abilities to reflect on videos of classroom teaching. *Journal of Teacher Education, 61*, 339-350. doi: 0.1177/0022487110369555

Sasman, M. C., Linchevski, L. and Olivier, A. (1999). The influence of different representations on children's generalisation thinking processes. Proceedings of the Seventh Annual Conference of the Southern African Association for research in Mathematics and Science Education, Harare, Zimbabwe, 406-415.

Sherin, M, & van Es, E. (2009). Effects of video club participation on teachers' professional vision. *Journal of Teacher Education, 60*(1), 20-37. doi: 10.1177/0022487108328155

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15, 4-14.

Stylianide, G. (2010). Engaging secondary students in reasoning and proving. *Mathematics teaching*, 219.

Takır, A, Özerem, A. (2020). Ortaokul öğrencilerinin örüntü problemlerini çözme başarılarının çeşitli değişkenler açısından incelenmesi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 49, 582-599. DOI: 10.9779/pauefd.523388

Tanışlı, D., & Köse, N. Y. (2011). Generalization strategies about linear figural patterns: effect of figural and numerical clues. *Education and Science, 36* (160), 184-198.

Tanışlı, D, Yavuzsoy Köse, N, Camci, F. (2017). Matematik Öğretmen Adaylarının Örüntüler Bağlamında Genelleme ve Doğrulama Bilgileri. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, 5 (3) , 195-222.

Tolga, A, Cantürk Günhan, B. (2020). 6. sınıf öğrencilerinin alan hesaplamada ilişkilendirme ve genelleme süreçlerinin incelenmesi. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17 (1) , 1042-1066. DOI: 10.33711/yyuefd.800922

Türkoğlu, H. & Yalın, H.İ. (2020). Sınıf öğretmeni adaylarının lineer ve lineer olmayan örüntüleri genelleme stratejileri. *Başkent Unıversity Journal of Education.* 7 (1), 110-128.

Van de Walle, J. A. Karp, K., & Bay-Williams, J. M. (2011). İlkokul ve ortaokul matematiği: Gelişimsel yaklaşımla öğretim (7.baski). (Çev. Edit. S. Durmuş). Ankara: Nobel Akademik Yayincilik.

Venenciano, L. & Heck, R. (2016). Proposing and testing a model to explain traits of algebra preparedness. *Educational Studies Mathematics*, 92, 21–35.

Yakut Çayir, M. & Akyüz, G. (2015). 9. sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme problemlerini çözme stratejilerinin belirlenmesi. *Necatibey eğitim fakültesi elektronik fen ve matematik eğitimi dergisi, 9* (2) , 205-229.

Yeşildere İmre, S. Akkoç, H. (2012). Investigating the development of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of generalising number patterns through school practicum. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 15, 207–226, DOİ: 10.1007/s10857-012-9203-6

Yeşildere İmre, S, Akkoç, H. & Baştürk Şahin, B. (2017). Middle school students' mathematical generalization abilities with the use of different representations. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)* , 8 (1) , 103-129. DOI: 10.16949/turkbilmat.303220

Yılmaz, R. & Argün, Z. (2013). Matematiksel genelleme sürecinde görselleştirme ve önemi. *Hacettepe üniversitesi eğitim fakültesi dergisi*, 28 (28-2) , 564-576.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics* 49, 379–402. DOİ:10.1023/A:1020291317178